SHOQATA E MATEMATIKANËVE
TË KOSOVËS

PËRMBLEDHJE DETYRASH PËR PËRGATITJE PËR OLIMPIADA TË MATEMATIKËS

Armend Sh. Shabani

Prishtinë, 2009

TRANSFORMIMET E SHPREHJEVE ALGJEBRIKE

Detyra 1. Të thjeshtohet funksioni

$$f(a,b,c)=\frac{a^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2}{(c-a)(c-b)}\ .$$

Zgjidhja.

Pas transformimet merret

$$f(a,b,c)=\frac{a^2(b-c)-b^2(a-c)+c^2(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

Meqë $b-c=(a-c)-(a-b)$ numëruesi i thyesës së mësipërme transformohet si vijon.

$$\begin{aligned}&a^2(b-c)-b^2(a-c)+c^2(a-b)\\&=a^2(a-c)-a^2(a-b)-b^2(a-c)+c^2(a-b)\\&=(a-c)(a^2-b^2)-(a-b)(a^2-c^2)\\&=(a-c)(a-b)(a+b)-(a-b)(a-c)(a+c)\\&=(a-b)(a-c)(a+b-a-c)\\&=(a-b)(a-c)(b-c)\ .\end{aligned}$$

Prandaj $f(a,b,c)=1$, nëse $a\neq b,\ b\neq c,\ c\neq a$.

Detyra 2. Le të jenë a,b,c numra real të tillë që $a\neq b,\ b\neq c,\ c\neq a$.

Vërtetoni se vlen

$$A\equiv a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)\neq 0\ .$$

Zgjidhja.

Së pari e transformojmë shprehjen e dhënë.

$$\begin{aligned}A&\equiv a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)\\&=a^4b-a^4c+b^4c-b^4a+c^4(a-b)\end{aligned}$$

$$= ab(a^3 - b^3) - c(a^4 - b^4) + c^4(a-b)$$

$$= ab(a-b)(a^2 + ab + b^2) - c(a-b)(a+b)(a^2 + b^2) + c^4(a-b)$$

$$= (a-b)(ab(a^2 + ab + b^2) - c(a+b)(a^2 + b^2) + c^4)$$

$$= (a-b)(a^3b + a^2b^2 + ab^3 - a^3c - acb^2 - a^2cb - b^3c + c^4)$$

$$= (a-b)(a^3(b-c) + a^2b(b-c) + ab^2(b-c) - c(b^3 - c^3))$$

$$= (a-b)(b-c)(a^3 + a^2b + ab^2 - c(b^2 + bc + c^2))$$

$$= (a-b)(b-c)(a^3 + a^2b + ab^2 - b^2c - bc^2 - c^3)$$

$$= (a-b)(b-c)(a^3 - c^3 + b(a^2 - c^2) + b^2(a-c)).$$

Pra $A \equiv (a-b)(b-c)(a-c)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc)$.

Supozojmë të kundërtën, pra se $A = 0$. Meqë $a \neq b \Rightarrow a - b \neq 0$.
Ngjashëm $b - c \neq 0,\ a - c \neq 0$. Mbetet që

$$a^2 + b^2 + c^2 + ab + ac + bc = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(a+b)^2 + (b+c)^2 + (a+c)^2}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2 + (b+c)^2 + (a+c)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a + b = 0 \wedge b + c = 0 \wedge a + c = 0.$$

Duke zgjidhur sistemin e fundit marrim $a = b = c = 0$, gjë që paraqet kontradiksion me supozimin që $a \neq b,\ b \neq c,\ c \neq a$. Pra, përfundojmë se shprehja e dhënë është e ndryshme nga 0.

Detyra plotësuese

1. Le të jenë a, b, c numra real të tillë që $a \neq b,\ b \neq c,\ c \neq a$.

Vërtetoni se vlen implikacioni

$$a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b) = 0 \Rightarrow a + b + c = 0.$$

2. Le të jenë a, b, c numra real që plotësojnë kushtin $a + b + c \neq 0$. Nëse $a(b^3 - c^3) + b(c^3 - a^3) + c(a^3 - b^3) = 0$, vërtetoni se $a = b$ ose $b = c$ ose $a = c$.

Detyra 3. Zbërtheni në faktor

$$y^3(a-x) - x^3(a-y) + a^3(x-y).$$

Zgjidhja.

Transformojmë shprehjen si vijon

$$
\begin{aligned}
&y^3(a-x)-x^3(a-y)+a^3(x-y)\\
&\qquad = ay^3-xy^3-ax^3+x^3y+a^3(x-y)\\
&\qquad = xy(x^2-y^2)-a(x^3-y^3)+a^3(x-y)\\
&\qquad = xy(x-y)(x+y)-a(x-y)(x^2+xy+y^2)+a^3(x-y)\\
&\qquad = (x-y)(xy(x+y)-a(x^2+xy+y^2)+a^3)\\
&\qquad = (x-y)(x^2y+xy^2-ax^2-axy-ay^2+a^3)\\
&\qquad = (x-y)(x^2(y-a)+xy(y-a)-a(y^2-a^2))\\
&\qquad = (x-y)(y-a)(x^2+xy-ay-a^2)\\
&\qquad = (x-y)(y-a)((x-a)(x+a)+y(x-a))\\
&\qquad = (x-y)(y-a)(x-a)(x+a+y)\,.
\end{aligned}
$$

Detyrë plotësuese

3. Të zbërthehet në faktor shprehja

$$(y^3-x^3)(a-z)+(y^3-a^3)(z-x)+(a^3-x^3)(z-y)\,.$$

Detyra 4. Zbërtheni në faktor shprehjen $x^{10}+x^5+1$.

Zgjidhja.

$$
\begin{aligned}
&x^{10}+x^5+1=(x^{10}+x^9+x^8)-(x^9+x^8+x^7)+(x^7+x^6+x^5)\\
&-(x^6+x^5+x^4)+(x^5+x^4+x^3)-(x^3+x^2+x)+(x^2+x+1)\\
&=x^8(x^2+x+1)-x^7(x^2+x+1)+x^5(x^2+x+1)-x^4(x^2+x+1)\\
&+x^3(x^2+x+1)-x(x^2+x+1)+(x^2+x+1)\\
&=(x^2+x+1)(x^8-x^7+x^5-x^4+x^3-x+1)\,.
\end{aligned}
$$

Detyrë plotësuese

4. A mund të zbërthehet në faktor shprehja x^7+x^5+1?

Detyra 5. Të zbërthehet në faktor të thjeshtë shprehja $A(x)=x^3+3x^2-4$ e pastaj të njehsohet $A(98)$.

Zgjidhja.

Mënyra I.

Transformojmë shprehjen $A(x)$ si vijon

$$A(x)=x^3+3x^2-4=x^3-x^2+4x^2-4=x^2(x-1)+4(x^2-1)$$

$$=x^2(x-1)+4(x-1)(x+1)=(x-1)(x^2+4x+4)=(x-1)(x+2)^2$$

Pra $A(98)=(98-1)(98+2)^2=97\cdot 100^2=970000$.

Shënim. Vërejmë se në rastin tonë $3x^2$ është shkruar si $-x^2+4x^2$. Por në rastin e përgjithshëm një gjë e tillë është më vështirë të bëhet.

Për këtë arsye detyrën po e zgjidhim me një mënyrë tjetër, e cila paraqet rast më të përgjithshëm për zgjidhjen e detyrave të këtij lloji.

Mënyra II.

Caktojmë faktorët e gjymtyrës së lirë –4. Ata janë $\pm 1, \pm 2, \pm 4$.

Vërejmë se $A(1)=1^3+3\cdot 1^2-4=0$. Pra $A(x)=(x-1)\cdot Q(x)$.

Pjesëtojmë $A(x)$ me $(x-1)$ për të caktuar polinomin $Q(x)$.

$$\begin{array}{l}
(x^3+3x^2-4):(x-1)=x^2+4x+4 \\
\underline{-x^3 \mp x^2} \\
\qquad 4x^2-4 \\
\qquad \underline{-4x^2 \mp 4x} \\
\qquad\qquad 4x-4 \\
\qquad\qquad \underline{4x-4} \\
\qquad\qquad\quad 0
\end{array}$$

Pra $x^3+3x^2-4=(x-1)(x^2+4x+4)$. Dijmë se $x^2+4x+4=(x+2)^2$.

Pra $A(x)\equiv x^3+3x^2-4=(x-1)(x+2)^2$.

Kështu që $A(98)=(98-1)\cdot(98+2)^2=970000$.

Detyra plotësuese

5. Le të jetë $A(x)$ polinom i shkallës së dytë, kurse $B(x)$ polinom i shkallës së parë.

a) Caktoni $A(B(x))$ dhe $B(A(x))$.

b) Nëse gjymtyrët e lira të polinomit $A(x)$ dhe $B(x)$ janë të ndryshme nga 0, tregoni se $A(B(x)) \neq B(A(x))$.

c) Caktoni kushtet që duhet plotësuar koeficientët e polinomeve $A(x)$ dhe $B(x)$ ashtu që $A(x) = B(x)$.

6. Le të jenë $A(x), B(x), C(x)$ polinome të shkallës së tretë, dytë dhe parë, përkatësisht. Vërtetoni ose mohoni:

$$A(B(C(x))) = B(C(A(x))) = C(A(B(x))).$$

Detyra 6. Nëse $x + y + z = 0$ vërtetoni se vlen $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$.

Zgjidhja.

Mënyra I.

Meqë $x + y + z = 0 \Rightarrow x = -y - z$.

Pra $x^3 + y^3 + z^3 = (-y - z)^3 + y^3 + z^3$

$$= -y^3 - 3y^2z - 3yz^2 - z^3 + y^3 + z^3$$

$$= -3yz(y + z) = -3yz(-x) = 3xyz.$$

Mënyra II.

$$x + y + z = 0 \Leftrightarrow (x + y + z)^3 = 0$$

$$(x + y)^3 + 3(x + y)^2 z + 3(x + y) \cdot z^2 + z^3 = 0$$

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 + 3(x^2 + 2xy + y^2)z + 3xz^2 + 3yz^2 + z^3 = 0$$

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 + 3x^2z + 6xyz + 3y^2z + 3xz^2 + 3yz^2 + z^3 = 0$$

$$x^3 + y^3 + z^3 + (3x^2y + 3xy^2 + 3xyz) + (3x^2z + 3xz^2 + 3xyz) +$$

$$+ (3y^2z + 3yz^2 + 3xyz) - 3xyz = 0$$

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xy(x + y + z) + 3xz(x + y + z) + 3yz(x + y + z) = 3xyz.$$

Përfundimisht, $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$, gjë që duhej vërtetuar.

Detyra 7. Nëse $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$, $a+b+c=1$ dhe $a^2+b^2+c^2=1$, të vërtetohet se vlen $xy+xz+yz=0$.

Zgjidhja.

Le të jetë $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k$. Atëherë

$$xy+xz+yz=k^2(ab+ac+bc)$$

$$2(xy+xz+yz)=k^2(2ab+2ac+2bc)$$

$$=k^2(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc)-k^2(a^2+b^2+c^2)$$

$$=k^2(a+b+c)^2-k^2(a^2+b^2+c^2)=k^2-k^2=0.$$

Pra $xy+xz+yz=0$, gjë që duhej vërtetuar.

Detyra plotësuese

7. Nëse $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}=k,\quad xyz=-\frac{1}{2},\ a+b+c+1,\ a^2+b^2+c^2=1$, atëherë tregoni se $x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2=k$.

8. Le të jenë a,b,c numra real pozitiv. Nëse vlejnë relacionet

$$\begin{cases} \frac{a^2}{x^2}-\frac{b^2+c^2}{y^2}=0 \\ \frac{a^2}{x^2}-\frac{a^2}{z^2}+\frac{b^2+c^2}{z^2}=0 \end{cases}$$

atëherë tregoni se (x,y,z) paraqet "*treshe të Pitagorës*".

Shënim. Numrat (x,y,z) paraqesin "*treshe të Pitagorës*" nëse plotësojnë *teoremën e Pitagorës*, pra nëse $x^2+y^2=z^2$.

Detyra 8. Nëse $a+b+c=0$ dhe $a^2+b^2+c^2=1$ njehsoni $a^4+b^4+c^4$.

Zgjidhja.

Nga $a^2+b^2+c^2=1$ kemi

$$1=a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2) \quad (1)$$

$(ab+ac+bc)^2=a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2+2abc(a+b+c)$ e meqë

$a+b+c=0$ kemi

$$(ab+ac+bc)^2 = a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 \qquad (2)$$

Meqë $a+b+c=0$ kemi

$$a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc)=0$$

Pra

$$ab+ac+bc=-\frac{1}{2} \qquad (3)$$

Kur (3) zëvendësohet në (2) merret

$$a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2=\frac{1}{4} \qquad (4)$$

Kur (4) zëvendësohet në (1) merret

$1=a^4+b^4+c^4+2\cdot\frac{1}{4}$ prej nga përfundimisht merret $a^4+b^4+c^4=\frac{1}{2}$.

Detyrë plotësuese

9. Le të vlejnë relacionet $a+b+c=1,\ a^2+b^2+c^2=10$. Çfarë kushti duhet të plotësojnë a,b,c ashtu që të vlejë $a^4+b^4+c^4=\frac{1}{2}$?

Detyra 9. Nëse vlen $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$ vërtetoni se vlen

$$(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)\cdot(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)=(a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n)^2.$$

Zgjidhja.

Le të jetë $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}=k$, pra $a_i=b_i\cdot k$ ku $i=1,2,\ldots,n$.

Kemi $(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)\cdot(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)$

$$=(b_1^2k^2+b_2^2k^2+\ldots+b_n^2k^2)\cdot(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)$$

$$=k^2(b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2)^2=k^2(b_1\cdot b_1+b_2\cdot b_2+\ldots+b_n\cdot b_n)^2$$

$$=k^2\left(\frac{a_1\cdot b_1}{k}+\frac{a_2\cdot b_2}{k}+\ldots+\frac{a_n\cdot b_n}{k}\right)^2=(a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+\ldots+a_n\cdot b_n)^2$$

gjë që duhej vërtetuar.

Detyra 10. Të njehsohet vlera e shprehjes $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$.

Zgjidhja.
Mënyra I.

Shprehjen e dhënë e shënojmë me *x* dhe e zgjidhim barazimin

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=x$$

$$20+14\sqrt{2}+3\cdot\sqrt[3]{(20+14\sqrt{2})^2}\cdot\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$$

$$+3\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{(20-14\sqrt{2})^2}+20-14\sqrt{2}=x^3$$

$$40+3\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}\cdot\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}\cdot(\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}})=x^3$$

$$40+3\sqrt[3]{400-2\cdot 14^2}\cdot x=x^3$$

$$40+6x=x^3 \Rightarrow (x-4)(x^2+4x+10)=0\,.$$

Me zgjidhjen e barazimit të fundit kemi $x=4$, sepse

$$x^2+4x+10=(x+2)^2+6>0 \text{ për çdo } x.$$

Pra $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4$.

Mënyra II.

Vërejmë se

$$(2+\sqrt{2})^3=2^3+3\cdot 2^2\cdot\sqrt{2}+3\cdot 2\cdot\sqrt{2^2}+\sqrt{2^3}$$

$$8+12\sqrt{2}+6\cdot 2+2\sqrt{2}=20+14\sqrt{2}\,.$$

Poashtu $(2-\sqrt{2})^3=20-14\sqrt{2}$.

Prandaj

$$\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=\sqrt[3]{(2+\sqrt{2})^3}+\sqrt[3]{(2-\sqrt{2})^3}$$

$$=2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=4\,.$$

Shënim. Duket se mënyra e dytë është më e lehtë, por në rastin e përgjithshëm është vështirë të përcaktohen numrat a,b,c,d të tillë që $(a+b\sqrt{2})^3=c+d\sqrt{2}$.

Mënyra III.

Zëvendësojmë $\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}} = x \Rightarrow 20+14\sqrt{2} = x^3$ (1)

$\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}} = y \Rightarrow 20-14\sqrt{2} = y^3$ (2)

Nga (1) dhe (2) kemi

$$\begin{cases} x^3+y^3=40 \\ x^3y^3=8 \end{cases} \sim \begin{cases} (x+y)(x^2-xy+y^2)=40 \\ (xy)^3=8 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} (x+y)((x+y)^2-3xy)=40 \\ xy=2 \end{cases} \sim \begin{cases} (x+y)((x+y)^2-6)=40 \\ xy=2 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} (x+y)^3-6(x+y)-40=0 \\ xy=2 \end{cases} \sim \begin{cases} ((x+y)-4)((x+y)^2+4(x+y)+10)=0 \\ xy=2 \end{cases}$$

Meqë $(x+y)^2+4(x+y)+10>0,\ \forall x,y\in R$ mbetet që $\begin{cases} x+y-4=0 \\ xy=2 \end{cases}$

$\sim \begin{cases} x+y=4 \\ xy=2 \end{cases}$. Duke zgjidhur sistemin e fundit merret $x=2+\sqrt{2},\ y=2-\sqrt{2}$.

Përfundojmë se $x+y=4$.

Detyra plotësuese

10. Vërtetoni se $\sqrt[4]{68+48\sqrt{2}}+\sqrt[4]{68-48\sqrt{2}}=4$. (Detyrën zgjidheni në në tri mënyra).

11. Të njehsohet vlera e shprehjes $\sqrt[4]{17+12\sqrt{2}}-2\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}$.

Detyra 11. Të thjeshtohet shprehja $S=\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$.

Zgjidhja.

Marrim zëvendësimet $\sqrt{2+\sqrt{3}}=a,\ \sqrt{2-\sqrt{3}}=b$.

Vërejmë se:

$$a^2+b^2=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2}+\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}=4$$

$$a\cdot b=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{4-3}=1.$$

Shprehja e dhënë mund të shkruhet si vijon

$$S=\frac{a^2}{\sqrt{2}+a}+\frac{b^2}{\sqrt{2}-b}=\frac{a^2\sqrt{2}-a^2b+b^2\sqrt{2}+ab^2}{2+a\sqrt{2}-b\sqrt{2}-ab}$$

$$=\frac{\sqrt{2}(a^2+b^2)-ab(a-b)}{2+\sqrt{2}(a-b)-ab}=\frac{4\sqrt{2}-(a-b)}{1+\sqrt{2}(a-b)}.$$

Po ashtu tregohet se $a-b=\sqrt{2}$. Tregoni.

D.m.th. $$S=\frac{4\sqrt{2}-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{3}=\sqrt{2}\ .$$

Detyrë plotësuese

12. Të thjeshtohet shprehja

$$S=\frac{n+\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+\sqrt{n^2-1}}}+\frac{n-\sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-\sqrt{n^2-1}}}\ .$$

Detyra 12. Të njehsohet shuma

$$S=\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}$$

ku x,y,z janë numra real të tillë që $xyz=1$.

Zgjidhja.
Mënyra I.

$$S=\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}$$

$$=\frac{z}{z(1+x+xy)}+\frac{xz}{xz(1+y+yz)}+\frac{1}{1+z+zx}$$

$$=\frac{z}{z+xz+xyz}+\frac{xz}{xz+xyz+xyz^2}+\frac{1}{1+z+zx}$$

$$=\frac{z}{z+xz+1}+\frac{xz}{xz+1+z}+\frac{1}{xz+z+1}=\frac{xz+z+1}{xz+z+1}=1.$$

Mënyra II.

Nga $xyz=1 \Rightarrow xy=\frac{1}{z},\ y=\frac{1}{xz}$. Këto shprehje i zëvendësojmë në shumën *S*. Merret

$$S=\frac{1}{1+x+\frac{1}{z}}+\frac{1}{1+\frac{1}{xz}+\frac{1}{x}}+\frac{1}{1+z+zx}$$

$$=\frac{z}{z+xz+1}+\frac{xz}{z+xz+1}+\frac{1}{1+z+zx}=\frac{z+xz+1}{z+xz+1}=1.$$

Shënim. Ngjashëm do të merrnim sikur të shfrytëzonim relacionin $yz=\frac{1}{x}$ apo

$$xz=\frac{1}{y}.$$

Detyrë plotësuese

13. Vërtetoni ose mohoni: nëse numrat real x,y,z plotësojnë kushtin $x\cdot y\cdot z=1$, atëherë $\forall n\in N$ vlen

$$\frac{1}{1+x^n+x^ny^n}+\frac{1}{1+y^n+y^nz^n}+\frac{1}{1+z^n+x^nz^n}=1.$$

Detyra 13. Vërtetoni barazinë

$$\sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{\sqrt{2}-1}}+\sqrt{\sqrt{2}-2\sqrt{\sqrt{2}-1}}=2.$$

Zgjidhja.

Qartë se $\sqrt{2}-2\sqrt{2-1}>0$. Tregoni. Kështu që merret:

$$\sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{\sqrt{2}-1}}+\sqrt{\sqrt{2}-2\sqrt{\sqrt{2}-1}}$$

$$=\sqrt{(1+\sqrt{\sqrt{2}-1})^2}+\sqrt{(1-\sqrt{\sqrt{2}-1})^2}$$

$$=1+\sqrt{\sqrt{2}-1}+1-\sqrt{\sqrt{2}-1}=2.$$

A mund të përgjithësohet barazia për $n>2$?

Detyra 14. Le të jenë a,b numra real për të cilët vlen $a^3-3ab^2=8,$. $b^3-3a^2b=\sqrt{61}$. Njehsoni a^2+b^2.

***Zgjidhja.*.**

Relacionet $a^3-3ab^2=8$ dhe $b^3-3a^2b=\sqrt{61}$ i ngrisim në katror dhe i mbledhim anë për anë me ç'rast merret:

$$a^6+b^6-6a^4b^2-6a^2b^4+9a^2b^2(a^2+b^2)=125$$

$$a^6+b^6+3a^4b^2+3a^2b^4-9a^4b^2-9a^2b^2+9a^2b^2(a^2+b^2)=125$$

$$(a^2+b^2)^3-9a^2b^2(a^2+b^2)+9a^2b^2(a^2+b^2)=125\,.$$

Pra $(a^2+b^2)^3=125$. Përfundojmë se $a^2+b^2=5$.

Detyra 15. Njehsoni $\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\frac{1}{(a+2)(a+3)}$

$$+\frac{1}{(a+3)(a+4)}+\frac{1}{(a+4)(a+5)}\,.$$

Zgjidhja.

Për më tepër njehsojmë shumën vijuese

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\frac{1}{(a+2)(a+3)}+...+\frac{1}{(a+n)(a+n+1)}\,.$$

Vërejmë së pari se vlen

$$\frac{1}{(a+n)(a+n+1)}=\frac{1}{a+n}-\frac{1}{a+n+1}\text{, për çdo } n\in N\cup\{0\}\,.$$

Prandaj

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{a(a+1)}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a-1}\\
&\frac{1}{(a+1)(a+2)}=\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2}\\
&\qquad\qquad\dots\\
&\frac{1}{(a+n)(a+n+1)}=\frac{1}{a+n}-\frac{1}{a+n+1}
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Duke mbledhur të dy anët e (1) merret

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\,...\,+\frac{1}{(a+n)(a+n+1)}$$

$$=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+n+1}=\frac{n+1}{a(a+n+1)}$$

Në rastin tonë $n=4$. Pra

$$\frac{1}{a(a+1)}+\frac{1}{(a+1)(a+2)}+\frac{1}{(a+2)(a+3)}+\frac{1}{(a+3)(a+4)}$$

$$+\frac{1}{(a+4)(a+5)}=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+5}=\frac{5}{a(a+5)}.$$

Detyra plotësuese

14. Vërtetoni se

$$\frac{1}{a(a+2)}+\frac{1}{(a+2)(a+4)}+\frac{1}{(a+4)(a+6)}+\frac{1}{(a+6)(a+8)}=\frac{4}{a(a+8)}.$$

15. Vërtetoni se

$$\frac{1}{a^2(a^2+3)}+\frac{1}{(a^2+3)(a^2+6)}+\frac{1}{(a^2+6)(a^2+9)}$$

$$+\frac{1}{(a^2+9)(a^2+12)}=\frac{4}{a^2(a^2+12)}.$$

Detyra 16. Njehsoni vlerën e shprehjes

$$A\equiv 2\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3^4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{3^{2^n}}\right),\ n\in N.$$

Zgjidhja.

Shprehjen e dhënë e shumëzojmë dhe e pjesëtojmë me $1-\frac{1}{3}$. Marrim

$$A\equiv\frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)}\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3^4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{3^{2^n}}\right)$$

$$=3\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3^2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3^4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{3^{2^n}}\right).$$

Duke vazhduar në këtë mënyrë merret $A=3\cdot\left(1-\frac{1}{3^{2^{n+1}}}\right)$.

Detyra plotësuese

16. Tregoni se vlen

$$(k-1)\cdot\left(1+\frac{1}{k}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{k^{2^n}}\right)=k\cdot\left(1-\frac{1}{k^{2^{n+1}}}\right).$$

17. Tregoni se vlen

$$\left(1+\frac{1}{2^3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^6}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{2^{12}}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2^{3\cdot 2^n}}\right)=\frac{8}{7}\cdot\left(1-\frac{1}{2^{6\cdot 2^n}}\right).$$

18. Tregoni se vlen

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{x^3}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{x^6}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{x^{3\cdot 2^n}}\right)=\frac{x^2}{x^2+x+1}\cdot\left(1-\frac{1}{x^{6\cdot 2^n}}\right).$$

Detyra 17. Nëse $a\neq b\neq c\neq a$ tregoni se

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}=a+b+c\ .$$

Zgjidhja.

Transformojmë anën e majtë.

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$$

$$=\frac{a^3(c-b)+b^3(a-c)+c^3(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=\frac{(a^3-b^3)(c-b)+b^3(c-b)+b^3(a-c)+c^3(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)(c-b)+b^3(c-b+a-c)+c^3(b-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=\frac{(a-b)(a^2+ab+b^2)(c-b)-(a-b)(c^3-b^3)}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=\frac{(a-b)((a^2+ab+b^2)(c-b)-(c-b)(c^2+bc+b^2))}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$=\frac{(a-b)(c-b)(a^2-c^2+b(a-c))}{(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$= \frac{(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = a+b+c$$, gjë që duhej treguar.

Detyra 18. Le të jetë a numër i plotë. Tregoni se numri $a(a+1)(a+2)(a+3)+1$ është katror i plotë.

Zgjidhja.

Zbërthejmë numrin e dhënë

$$a(a+1)(a+2)(a+3)+1 = (a^2+a)(a^2+5a+6)+1$$
$$= a^4+5a^3+6a^2+a^3+5a^2+6a+1$$
$$= a^4+6a^3+11a^2+6a+1$$
$$= a^4+6a^3+9a^2+2a^2+6a+1$$
$$= (a^2+3a)^2+2(a^2+3a)+1$$
$$= (a^2+3a+1)^2$$, gjë që duhej treguar.

Detyra plotësuese

19. Le të jetë a numër i plotë. Tregoni se numri $(a+1)(a+3)(a+5)(a+7)+17$ nuk është katror i asnjë numri të plotë.

20. Le të jetë $a \neq 0,\ a \in Z$. Tregoni se numri $(a+2)(a+3)(a+4)+3$ nuk është fuqia e tretë e asnjë numri të plotë.

Detyra 19. Vërtetoni se shprehja $A=(n^2+5n)(n^2+5n+10)+24,\ n \in Z$ mund të shprehet si prodhim i katër numrave të njëpasnjëshëm të plotë.

Zgjidhja.

Transformojmë shprehjen e dhënë si vijon

$$A=(n^2+5n)(n^2+5n+10)+24$$
$$=(n^2+5n)(n^2+5n)+10(n^2+5n)+24$$
$$=(n^2+5n)^2+2\cdot 5\cdot(n^2+5n)+25-1$$
$$=(n^2+5n+5)^2-1$$
$$=(n^2+5n+5-1)(n^2+5n+5+1)$$
$$=(n^2+5n+4)(n^2+5n+6)$$

$$= (n+1)(n+4)(n+2)(n+3)$$

$$= (n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$, gjë që duhej vërtetuar.

Detyra 20. Vërtetoni se polinomi $x^{44}+x^{33}+x^{22}+x^{11}+1$ plotpjesëtohet me $x^4+x^3+x^2+x+1$.

Zgjidhja.

Le të shënojmë $A = x^{44}+x^{33}+x^{22}+x^{11}+1$, $B = x^4+x^3+x^2+x+1$.

Shqyrtojmë ndryshimin *A* – *B*.

$$A - B = x^{44}+x^{33}+x^{22}+x^{11}+1-x^4-x^3-x^2-x-1$$
$$= (x^{44}-x^4)+(x^{33}-x^3)+(x^{22}-x^2)+(x^{11}-x)$$
$$= x^4(x^{40}-1)+x^3(x^{30}-1)+x^2(x^{20}-1)+x(x^{10}-1)\,.$$

Vërejmë se çdo faktor i ndryshimit *A* – *B* plotpjesëtohet me x^5-1. Kështu që mund të shkruajmë

$$A - B = (x^5-1)q(x)$$

Duke pjesëtuar me *B* kemi

$$\frac{A-B}{B} = \frac{(x^5-1)q(x)}{x^4+x^3+x^2+x+1}$$

$$\frac{A}{B}-1 = (x-1)q(x)\,.$$ Pse ?

Pra $\frac{A}{B} = 1+(x-1)q(x) \equiv g(x)$. D.m.th. $\frac{A}{B} = g(x)$ që d.m.th. se *A* plotpjesëtohet me *B*, gjë që duhej vërtetuar.

Detyrë plotësuese

21. Ngjashëm si në detyrën e mësipërme vërtetoni se polinomi $x^{10}+x^5+1$ nuk plotpjestohet me polinomin x^7+x^5+1.

Detyra 21. Të caktohet mbetja gjatë pjesëtimit të polinomit $P(x)$ me polinomin $P_1(x)$ ku $P(x) = x^{2000}-4\cdot x^{1998}+2$, $P_1(x) = x^2-2x$.

Zgjidhja.

Mbetja e pjesëtimit të polinomit $P(x)$ me $P_1(x)$ është polinomi linear $l(x)=ax+b$ pra $\dfrac{P(x)}{P_1(x)}=Q(x)+\dfrac{l(x)}{P_1(x)}$.

Pra

$$P(x)=P_1(x)\cdot Q(x)+l(x)$$

$$P(x)=Q(x)\cdot x(x-2)+ax+b\,.$$

Për $x=0$, $P(0)=b$.

Për $x=2$, $P(2)=2a+b$.

Qartë se $P(0)=2$. Pra $b=2$

Po ashtu lehtë tregohet se $P(2)=2$. D.m.th. $2=2a+2\Rightarrow a=0$

Pra merret mbetja $l(x)=2$.

Detyra plotësuese

22. Le të jetë dhënë polinomi $p(x)=x^n+x^{n-1}+...+x,\ n>1,\ x\in R$.

Tregoni se mbetja gjatë pjesëtimit të polinomit $p(x)$ me polinomin $p_1(x)=x^2-2x$ është polinom trajtës kx, ku $k\in N$.

23. Në *universitetin alfa*, gjymtyra e lirë e polinomeve është numër natyror më i madh se 1. Në këtë universitet polinomi $P(x)$ quhet i "*thjeshtë*" nëse gjymtyra e lirë e tij është numër i thjeshtë. Të tregohet se në universitetin alfa, "*polinomi i thjeshtë*" nuk plotpjestohet me asnjë polinom.

Detyra 22. Të caktohen a,b,c,d ashtu që për çdo x të vlejë

$$a(x+1)x(x-1)+bx(x-1)+c(x-1)+d=x^3\,.$$

Zgjidhja.

Transformojmë shprehjen e dhënë

$$a(x+1)x(x-1)+bx(x-1)+c(x-1)+d=x^3$$

$$ax^3-ax+bx^2-bx+cx-c+d=x^3$$

$$ax^3+x(c-a-b)+bx^2+d-c=x^3 \qquad (1)$$

Duke barazuar koeficientët e të dy anëve të relacionit (1) merret sistemi $a=1\ \wedge\ c-a-b=0\ \wedge\ b=0\ \wedge\ d-c=0$ me zgjidhjen e të cilit merret $a=1,\ b=0,\ c=1,\ d=1$.

Detyra plotësuese

24. Tregoni se nuk ekzistojnë numrat natyror a,b,c,d të tillë që për çdo $x \in R$ të vlejë $a(x^2+1)(x+2)+b(x^2+1)+cx+d=bx^3$.

25. Tregoni se nuk ekzistojnë numrat e plotë a,b,c,d të tillë që për çdo $x \in R$ të vlejë $ax(x^2+1)+bx(x-1)+cx+d(x^2+1)-\frac{1}{2}=x^2\left(x+\frac{5}{2}\right)$.

Detyra 23. Të caktohen numrat real l,m,n dhe p ashtu që thyesa $\dfrac{x^4+lx^3+mx^2+nx+p}{x^3+3x^2+x-5}$ pas thjeshtimit të shndërrohet në thyesën $\dfrac{x^2-4x+5}{x-1}$.

Zgjidhja.

Vërejmë se numëruesin e thyesës së dhënë duhet shkruar në formën

$$x^4+lx^3+mx^2+nx+p=(x^2-4x+5)(ax^2+bx+c) \qquad (1)$$

kurse emëruesin në formën

$$x^3+3x^2+x-5=(x-1)(ax^2+bx+c) \qquad (2)$$

Nga (1) merret

$$x^4+lx^3+mx^2+nx+p=ax^4+(b-4a)x^3+(c+5a-4b)x^2$$
$$+(5b-4c)x+5c \qquad (3)$$

Prej nga merret

$$a=1;\ b-4=l;\ c+5-4b=m;\ 5b-4c=n \qquad (4)$$

Nga (2) merret (shfrytëzojmë faktin që $a=1$).

$$x^3+3x^2+x-5=x^3+(b-1)x^2+(c-b)x-c$$

Pra

$$b-1=3;\ \ c-b=1,\ c=5 \qquad (5)$$

Nga (5) merret $b=4,\ c=5$.

Kur këto vlera i zëvendësojmë në (4) marrim

$$l=0,\ m=-6,\ n=0 \text{ dhe } p=25.$$

Detyra 24. A ekziston polinomi $P(x)$ me koeficientët numra të plotë që plotëson kushtet $P(2)=4$ dhe $P(6)=6$?

Zgjidhja.

Le të jetë $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ polinom i çfarëdoshëm me koeficientë të plotë.

Atëherë $P(a)=a_na^n+a_{n-1}a^{n-1}+...+a_1a+a_0$

$P(b)=a_nb^n+a_{n-1}b^{n-1}+...+a_1b+a_0$

Prandaj $P(a)-P(b)=a_n(a^n-b^n)+a_{n-1}(a^{n-1}-b^{n-1})+...+a_1(a-b)$

Pra $P(a)-P(b)$ plotpjesëtohet me $a-b$.

Në rastin tonë për $a=6,\ b=2$, kemi

$P(a)-P(b)=6-4=2$, kurse $a-b=4$.

Pra $2\vdots 4$ gjë që nuk është e saktë. Përfundojmë se polinomi i tillë nuk ekziston.

Detyrë plotësuese

26. A ekziston polinomi $P(x)$ me koeficientë numra të plotë jonegativ që plotëson kushtet $P(6)=48$ dhe $P(2)=16$?

Nëse po të caktohet ai polinom.

Detyra 25. Vërtetoni se numri

$$\underbrace{111\cdots11}_{2n-\text{shifra}}-\underbrace{22\cdots2}_{n-\text{shifra}}$$

është katror i një numri të plotë.

Zgjidhja.

Le të jetë $\underbrace{111\cdots11}_{n-\text{shifra}}=a$. Atëherë $\underbrace{111\cdots11}_{2n-\text{shifra}}=a\cdot10^n+a$. Pse?

D.m.th.

$$\underbrace{111\cdots11}_{2n-\text{shifra}}-\underbrace{22\cdots2}_{n-\text{shifra}}=(a\cdot10^n+a)-2a$$

$$=a\cdot10^n-a=a(10^n-1)=a\cdot\underbrace{99\cdots9}_{n-\text{shifra}}=a\cdot9\cdot a=9a^2=(3a)^2,$$

gjë që duhej vërtetuar.

DETYRA PËR USHTRIME

1. Faktorizoni shprehjen $A = a^4(b^2 - c^2) + b^4(c^2 - a^2) + c^4(a^2 - b^2)$.

2. Të zbërthehet në faktor linear shprehja

$$bc(b+c) + ca(c-a) - ab(a+b).$$

3. Zbërtheni në faktor polinomin

$$P(x,y,z) = xy(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3) + yz(y^3 - y^2z + yz^2 - z^3) + zx(z^3 - z^2x + zx^2 - x^3).$$

4. Thjeshtoni shprehjen

$$2(a^2 + 2a - 1)^2 + 5(a^2 + 2a - 1)(a^2 + 1) + 2(a^2 + 1)^2.$$

5. Thjeshtoni shprehjen $(a-b)c^3 - (a-c)b^3 + (b-c)a^3$.

6. Vërtetoni se nëse $a + b + c = 0$, ku $a \neq 0,\ b \neq 0,\ c \neq 0$, atëherë

$$\left(\frac{a-b}{c} + \frac{b-c}{a} + \frac{c-a}{b}\right) \cdot \left(\frac{c}{a-b} + \frac{a}{b-c} + \frac{b}{c-a}\right) = 9.$$

7. Vërtetoni se vlen

$$\left(\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}} + \sqrt{a+b-2\sqrt{ab}}\right)^2 = 4\max(a,b),\ (a,b \geq 0).$$

8. Nëse vlejnë relacionet

$$x + y + z = a,\ x^2 + y^2 + z^2 = \frac{3}{2}a^2,\ x^3 + y^3 + z^3 = a^3.$$

të caktohen

1) $xy + yz + zx$; 2) xyz; 3) $x^4 + y^4 + z^4$.

9. Nëse $ax^2 = by^2 = cz^2$ dhe $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ tregoni se vlen

$$\sqrt{ax+by+cz}=\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\ .$$

10. Nëse për numrat real a,b,c,d,x,y,z të ndryshëm nga zero vlejnë kushtet $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ dhe $\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=0$ tregoni se vlen $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

11. Nëse numrat racional a,b,c plotësojnë kushtet $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$, $abc\neq 0,\ a+b+c\neq 0$ vërtetoni se vlejnë relacionet:

a) $a+b+c\neq 0$ ose $a+c=0$ ose $b+c=0$

b) $\frac{1}{a^{2n-1}}+\frac{1}{b^{2n-1}}+\frac{1}{c^{2n-1}}=\frac{1}{a^{2n-1}+b^{2n-1}+c^{2n-1}},\ n\in N$.

12. Nëse $a\neq -b\neq c\neq -a$ dhe $x=\frac{a-b}{a+b},\ y=\frac{b-c}{b+c},\ z=\frac{c-a}{c+a}$ vërtetoni se vlen

$$(1+x)(1+y)(1+z)=(1-x)(1-y)(1-z)\ .$$

13. Nëse për numrat pozitiv a,b,c,d vlen

$$a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd\ ,$$

vërtetoni se $a=b=c=d$.

14. Nëse $x+y+z=1,\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$, njehsoni $x^2+y^2+z^2$.

15. Nëse numrat e dhënë a,b,c,x,y,z janë të ndryshëm nga zero dhe nëse

$$\frac{x^2-yz}{a}=\frac{y^2-zx}{b}=\frac{z^2-xy}{c}\neq 0$$

atëherë vlen

$$\frac{a^2-bc}{x}=\frac{b^2-ca}{y}=\frac{c^2-ab}{z}.$$ Vërtetoni.

16. Nëse a,b,c janë numra pozitiv për të cilët vlen $a+b<c$, atëherë vërtetoni se vlen

$$\sqrt{a+b+c+2\sqrt{ac+bc}}+\sqrt{a+b+c-2\sqrt{ab+bc}}=2\sqrt{c}\ .$$

17. Nëse $\frac{ay-bx}{c}=\frac{cx-az}{b}=\frac{bz-cy}{b}$ atëherë vlen $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$. Vërtetoni.

18. Vërtetoni se nëse $a,b,c\in R$, barazia

$$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2$$

$$=(a+b-2c)^2+(b+c-2a)^2+(c+a-2b)^2$$

implikon $a=b=c$.

19. Vërtetoni se nëse $a+b+c=0$, atëherë vlen

$$\frac{a^5+b^5+c^5}{5}=\frac{a^3+b^3+c^3}{3}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\ .$$

20. Vërtetoni se nëse $a+b+c=0$, atëherë vlen

$$\frac{a^7+b^7+c^7}{7}=\frac{a^5+b^5+c^5}{5}\cdot\frac{a^2+b^2+c^2}{2}\ .$$

21. Vërtetoni se nëse $\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0$, $a\neq b,\ b\neq c,\ c\neq a$, atëherë vlen $\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=0$.

22. Vërtetoni se nëse $a+b+c=0$, atëherë vlen

$$a^5(b^2+c^2)+b^5(a^2+c^2)+c^5(a^2+b^2)=\frac{(a^3+b^3+c^3)(a^4+b^4+c^4)}{2}\ .$$

23. Nëse $a^2+b^2+c^2=u$ dhe $a+b+c=v$ atëherë $a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc$ $=\frac{1}{2}(u+v^2)$. Vërtetoni.

24. Nëse $ax^3=by^3=cz^3$ dhe $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$, atëherë

$\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}=\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}$. Vërtetoni. Përgjithësoni.

25. Nëse $\sqrt{x^2+\sqrt[3]{x^4y^2}}+\sqrt{y^2+\sqrt[3]{x^2y^4}}=a$, atëherë

$\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{y^2}=\sqrt[3]{a^2}$. Vërtetoni.

26. Nëse $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=...=\frac{a_n}{b_n}$, atëherë

$\sqrt{(a_1+a_2+...+a_n)\cdot(b_1+b_2+...+b_n)}=\sqrt{a_1b_1}+\sqrt{a_2b_2}+...+\sqrt{a_nb_n}$.

Vërtetoni.

27. Vërtetoni se $2\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

28. Të njehsohet vlera e shprehjes

$$\sqrt{7-\sqrt{48}}+\sqrt{5-\sqrt{24}}+\sqrt{3-\sqrt{8}} .$$

29. Të thjeshtohet shprehja

$$A=\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} .$$

30. Të njehsohet shuma

$$A=\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{392}} .$$

31. Tregoni se për $n\geq 2$ vlen barazia

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\left(1-\frac{1}{16}\right)\cdot...\cdot\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{n+1}{2n}.$$

Vërtetoni identitetet

32. $$\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(b-a)}=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}.$$

33. $a^2 \cdot \dfrac{(d-b)(d-c)}{(a-b)(a-c)} + b^2 \cdot \dfrac{(d-c)(d-a)}{(b-c)(b-a)} + c^2 \cdot \dfrac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)} = d^2$.

34. Vërtetoni se polinomi

$\dfrac{1}{4} + a^2 + b^4 - 2\left(\dfrac{1}{2}a + \dfrac{1}{2}b^2 - ab^2\right)$ është katror i një trinomi.

35. Vërtetoni se vlen

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} + \frac{16}{1+x^{16}} = \frac{32}{1-x^{32}},\ |x| \neq 1.$$

36. Vërtetoni se vlera e shprehjes

$$\left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right)^2 + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right) \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)$$

është konstante për $abc \neq 0$.

Vërtetoni implikacionet

37. $\left(x = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \wedge y = \dfrac{(a+c-b)(a+b-c)}{(a+b+c)(b+c-a)} \wedge (b \neq 0,\ c \neq 0,\right.$

$\left.|b+c| \neq a\right) \Rightarrow (x+1)(y+1) = 2$.

38. $(x + y + z = 0 \wedge x \neq y \neq z \wedge xyz \neq 0) \Rightarrow \dfrac{x^2 + y^2 + z^2}{(y-z)^2 + (z-x)^2 + (x-y)^2} = \dfrac{1}{3}$.

Nëse $a + b + c = 0$, vërtetoni identitetet

39. $\left(\dfrac{a}{b+c} + \dfrac{b}{c+a} + \dfrac{c}{a+b}\right)\left(\dfrac{b+c}{a} + \dfrac{c+a}{b} + \dfrac{a+b}{c} + 2\right) = 3$.

40. $\dfrac{a^2}{a^2 - (b-c)^2} + \dfrac{b^2}{b^2 - (a-c)^2} + \dfrac{c^2}{c^2 - (a-b)^2} - \dfrac{3}{4} = 0$.

41. Vërtetoni identitetin

$$\frac{a^2b^2}{(a-c)(b-c)}+\frac{b^2c^2}{(b-c)(c-a)}+\frac{a^2c^2}{(c-b)(a-b)}=ab+ac+bc\,.$$

42. Tregoni se $(a-1)(a-3)(a-4)(a-6)+10$ është numër pozitiv për çdo $a\in R$.

43. A ekzistojnë numrat real a,b,c,m për të cilët vlen

$x^4+2x^3-23x^2+12x+m=(x^2+ax+c)(x^2+bx+c)$?

44. Të caktohen a,b ashtu që polinomi $P(x)=x^4+ax^3+bx^2-8x+4$ të jetë katror i plotë i një trinomi kuadratik $p(x)$.

45. Të caktohet mbetja gjatë pjesëtimit të polinomit $P(x)=x^{200}-3x^{199}-1$ me polinomin $P(x)=x^2-4x+3$.

46. Polinomi $P(x)$ gjatë pjesëtimit me $x+1$ jep mbetjen 3, kurse gjatë pjesëtimit me $x-1$ jep mbetjen 5. Të caktohet mbetja gjatë pjesëtimit të polinomit $P(x)$ me x^2-1.

47. Në polinomin $P(x)=x^4+ax^2+bx+c$, të caktohen numrat real a,b,c në mënyrë që polinomi të plotpjesëtohet me $(x-1)^3$.

48. Në polinomin $x^5+mx^4+2x^3+nx^2-3x+p$ të caktohen numrat real m,n,p në mënyrë që polinomi i dhënë të plotpjesëtohet me x^3+1.

49. Cilin kusht duhet plotësuar numrat real a,b,c,d në mënyrë që shprehja $a^2+d^2-2b(a+c-b)+2c(c-d)$ të ketë vlerën më të vogël?

50. Të thjeshtohet funksioni

$$f(x,y)=\sqrt{\frac{x+y^2}{y}+2\sqrt{x}}-\sqrt{\frac{x+y^2}{y}-2\sqrt{x}},\ \text{ku } x\ge 0,\ y>0\,.$$

TEORIA ELEMENTARE E NUMRAVE

1. Vërtetoni se nuk ekzistojnë numrat e plotë x, y për të cilët vlen $(x, y) = 7$ dhe $x + y + xy = 95$, ku shënimi (x, y) paraqet plotpjesëtuesin më të madh të përbashkët të numrave x dhe y.

Zgjidhja: Nga relacioni $(x, y) = 7$ rrjedhë se ekzistojnë numrat e plotë x, y, të tillë që $x = 7x_1,\ y = 7y_1$. Kur këto vlera për x dhe y, zëvendësohen në barazimin $x + y + xy = 95$ merret $7x_1 + 7y_1 + 7x_1 \cdot 7y_1 = 95$. Pra

$$7(x_1 + y_1 + 7x_1 \cdot y_1) = 95.$$

gjë që nuk është e saktë sepse në anën e majtë kemi numër që plotëpjesëtohet me 7 e në anën e djathtë jo.

2. Nëse n është numër tek atëherë $n^2 - 1$ plotpjesëtohet me 8. Vërtetoni.

Zgjidhja: Meqë n është numër tek ai mund të shkruhet në trajtën $n = 2k + 1$, ku $k \in Z$. Kemi $n^2 - 1 = (2k+1)^2 - 1 = 4k(k+1)$.

Meqë nga dy numra të njëpasnjëshëm njëri prej tyre është çift përfundojmë se $4k(k+1)$ plotpjesëtohet me 8.

3. Çdo numër i përbërë n ka faktor të thjeshtë $p > 1$, i cili është më i vogël ose baraz me $\sqrt{n}$.

Zgjidhja: Meqë n është numër i përbërë, atë mund ta shkruajmë në trajtën $n = p_1 \cdot p_2$. Sikur që të dy faktorët e thjeshtë p_1 dhe p_2 të jenë më të mëdhenjë se $\sqrt{n}$, pra sikur $p_1 > \sqrt{n}$ dhe $p_2 = \sqrt{n}$ do të kishim $n = p_1 \cdot p_2 > \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n$ që paraqet kontradiksion. Pra së paku njëri nga faktorët $p_1,\ p_2$ është më i vogël ose baraz me $\sqrt{n}$.

4. Vërtetoni se $\dfrac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)!}{a_1! \cdot a_2! \cdot ... \cdot a_n!}$ është numër i plotë, nëse $a_i\,(i = 1, 2, ..., n)$ janë numra të plotë jonegativ.

Zgjidhja: $$\frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)!}{a_1! \cdot a_2! \cdot ... \cdot a_n!} = \frac{(a_1 + a_2)!}{a_1! \cdot a_2!} \cdot \frac{(a_1 + a_2 + a_3)!}{a_3!(a_1 + a_2)!} \cdot ... \cdot \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n)!}{a_n!(a_1 + ... + a_{n-1})!}$$

$$=\binom{a_1+a_2}{a_2}\cdot\binom{a_1+a_2+a_3}{a_3}\cdot\ldots\cdot\binom{a_1+a_2+\ldots+a_n}{a_n}$$

Meqë numrat $\binom{k}{l}$ $k_i=0,1,2,\ldots,k-1;\ l=0,1,2,\ldots,\quad k\ge l$ janë numra të plotë (Pse?) atëherë edhe numri $\dfrac{(a_1+a_2+\ldots+a_n)!}{a_1!\cdot a_2!\cdot\ldots\cdot a_n!}$ është i plotë .

5. Vërtetoni se ekzistojnë pambarim shumë numra të thjeshtë të trajtës $4k-1\ (k\in N)$.

Zgjidhja: Së pari vërejmë se numrat $3, 7, 11, 19, 23, 31, \ldots$ janë numra të thjeshtë të trajtës $4k-1$. Duhet të tregojmë se numra të thjeshtë të kësaj trajte ka pambarim. Supozojmë të kundërtën. Pra, se bashkësia e numrave të thjeshtë të trajtës $4k-1\ (k\in N)$ është e fundme. Le të jetë ajo $\mathscr{N}=\{3,7,11,\ldots,P_n\}$.

Shqyrtojmë numrin $N=4(3\cdot 7\cdot 11\cdot\ldots\cdot P_n)-1$. Së pari lehtë tregohet se numri *N* është më i madh se çdo numër nga bashkësia *N* dhe ka trajtën $4k-1$ (këtu rolin e k – së e luan prodhimi $3\cdot 7\cdot 11\cdot\ldots\cdot P_n$). Pra, sipas supozimit *N* është numër i përbërë. Le të zbërthejmë numrin *N* në faktor të thjeshtë. Meqë $N+1=4(3\cdot 7\cdot 11\cdot\ldots\cdot P_n)$ plotpjesëtohet me të gjithë numrat e thjeshtë të trajtës $4k-1$, atëherë *N* është relativisht i thjesht me të gjithë ata numra, e meqë *N* është numër tek të gjithë faktorët e tij të thjesht kanë trajtën $4k+1$. Por kjo është e pamundur sepse prodhimi i dy numrave të trajtës $4k+1$ është i të njëjtës trajtë. Vërtetë $(4k_1+1)(4k_2+1)=16k_1k_2\ +4k_1+4k_2+1=4(4k_1k_2+k_1+k_2)+1=4r+1$.

D.m.th. prodhimi i disa numrave të trajtës $4k+1$ ka të njëjtën trajtë, gjersa *N* ka trajtën $4k-1$. Pra arritëm në kontradiksion të supozimit se *N* është i përbërë. D.m.th. *N* është numër i thjeshtë, dhe kjo tregon se bashkësia $\mathscr{N}$ është e pafundme, pra se bashkësia e numrave të thjeshtë të trajtës $4k-1$ është e pafundme (d.m.th. numra të thjeshtë të trajtës $4k-1$ ka pambarim shumë).

6. Vërtetoni se çdo dy numra (anëtar) të vargut $F_k=2^{2^k}+1,\ k=0,1,..$ janë relativisht të thjeshtë mes veti.

Zgjidhja:

7. Le të jetë p numër i thjesht tek. Vërtetoni se thyesa $\frac{2}{p}$ mund të paraqitet në mënyrë të vetme në formën

$$\frac{2}{p}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$$

ku x, y janë numra të ndryshëm natyror.

Zgjidhja: Transformojmë relacionin $\frac{2}{p}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$. Marrim

$$2xy = px + py$$

$$4xy = 2px + 2py$$

$$4xy + p^2 = p^2 + 2px + 2py$$

$$4xy + p^2 - 2px - 2py = p^2$$

$$(2x-p)(2y-p) = p^2 . \qquad (1)$$

Meqë $x \neq y \Rightarrow 2x - p \neq 2y - p$. Pra mbetet që zgjidhja e (1) të jetë sistemi

$$\left.\begin{array}{l} 2x-p=p^2 \\ 2y-p=1 \end{array}\right\} \wedge \left.\begin{array}{l} 2x-p=1 \\ 2y-p=p^2 \end{array}\right\} \qquad (2)$$

Pse? Pas zgjidhjes së sistemit (2) marrim zgjidhjet:

$$\begin{array}{l} x_1=\dfrac{p+1}{2} \\ y=\dfrac{p(p+1)}{2} \end{array} \quad \text{ose} \quad \begin{array}{l} x=\dfrac{p(p+1)}{2} \\ y=\dfrac{p+1}{2} \end{array}$$

Meqë zgjidhjet janë simetrike sipas x–it dhe y–it përfundojmë se paraqitja e numrit $\frac{2}{p}$ është e vetme.

8. Le të jenë a dhe b numra natyror. Gjatë pjesëtimit të numrit a^2+b^2 me $a+b$ merret herësi q dhe mbetja r. Caktoni të gjitha dyshet (a,b) për të cilët $q^2+r=1977$.

Zgjidhja: Sipas kushtit të detyrës vlen

$$a^2+b^2=(a+b)q+r \text{ ose}$$

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}=q+\frac{r}{a+b},\ \ 0\le r<a+b \qquad (1)$$

Tani nisemi nga fakti i njohur

$$(a-b)^2\ge 0 \Rightarrow a^2-2ab+b^2\ge 0 \Rightarrow a^2+b^2\ge 2ab$$

$$2(a^2+b^2)=a^2+b^2+a^2+b^2\ge a^2+b^2+2ab=(a+b)^2 .$$

Pra

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}\ge \frac{a+b}{2} \qquad (2)$$

Nga (1) dhe meqë $\frac{r}{a+b}<1$ kemi

$$q<\frac{a^2+b^2}{a+b}<q+1 .$$

Shqyrtojmë relacionin $q^2+r=1977$.

Meqë $45^2=2025>1977$ dhe

$44^2=1936<1977$ mbetet që $q\le 44$ dhe

$r\ge 1977-1936=41$.

Po ashtu lehtë tregohet se meqë $r<a+b$, duhet që $r<90$. Pse?

Tani për $q\le 43$ kemi $r\ge 1977-(43)^2=128$, pra $r\ge 128$ që kundërshton faktin $r<90$. Kështu që vetmja dyshe (q,r) që plotëson relacionin $q^2+r=1977$ është $q=44$ dhe $r=41$.

Për këto vlera të q–së dhe r–it kemi

$$\frac{a^2+b^2}{a+b}=44+\frac{41}{a+b} .$$

Pas transformimeve merret barazimi

$$a^2-44a+b^2-44b-41=0 .$$

Duke zgjidhur barazimin e fundit sipas a–së kemi

$$a_{1,2}=22\pm\sqrt{525+44b-b^2}$$

Qartë se për të qenë a numër natyror është e nevojshme që $\sqrt{525+44b-b^2}=k$, $k\in N$. Pas transformimeve merret $b^2-44b+k^2-525=0$, prej nga $b_{1,2}=22\pm\sqrt{1009-k^2}$.

Ngjashëm, si më sipër konkludojmë se

$$\sqrt{1009-k^2}=L,\ \ L\in N \Rightarrow 1009=k^2+L^2$$

Nëse shqyrtojmë shifrat e fundit të numrave *k* dhe *L*, ato mund të jenë (0, 9) ose (4, 5) sepse vetëm atëherë shuma e tyre jep numrin 9 si shifër të fundit. Tregoni se rasti i parë është i pamundshëm kurse rasti i dytë si zgjidhje jep dyshen (28, 15) ose (15, 28). Për këto vlera të *k*, *L* merret që:

$$a_1=50,\ a_2=37;\ \ a_3=50,\ a_4=7$$

$b_1=37,\ b_2=50;\ \ b_3=7,\ b_4=50$. Tregoni.

9. Vërtetoni se barazimi $(p-1)!+1=p^n$ nuk ka zgjidhje për numrat natyror *p* dhe *n* nëse $p>5$.

Zgjidhja: Supozojmë të kundërtën, pra se $(p-1)!+1=p^n$.

10. Nëse $(m-p)\,|\,(mn+pq)$ vërtetoni se vlen

$$(m-p)\,|\,(mq+np)\quad (m,n,p,q\in N,\ m\neq p).$$

Zgjidhja: Relacionin $mq+np$ e shkruajmë si vijon

$$mq+np=mn+pq-mn-pq+mq+np$$

$$=mn+pq-n(m-p)+q(m-p)\ =mn+pq+(m-p)(q-n).$$

Meqë vlen $(m-p)\,|\,(mn+pq)\Rightarrow mn+pq=k(m-p),\ \ k\in Z$.

Pra $\quad mq+np=k(m-p)+(m-p)(q-n)$

$=(m-p)(k+q-n)$. Pra $(m-p)\,|\,(mq+np)$, gjë që duhej vërtetuar.

11. A mund të caktohet numri *n* ashtu që numri 19^n-1 të plotpjesëtohet me 18 dhe 3?

Zgjidhja: Numri 19^n-1 mund ta shkruajmë si vijon

$$19^n-1=(18+1)^n-1=18^n+\binom{n}{1}18^{n-1}+\ldots+\binom{n}{n-1}18$$

Që 19^n-1 të plotëpjesëtohet me 18 dhe me 3 është e nevojshme dhe e mjaftueshme që $(-1)^n+1=0$, pra që *n* të jetë numër çift.

$$20^n-1=(20-1)^n-1=20^n-\binom{n}{1}20^{n-1}+\ldots+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}20+(-1)^n+1.$$

12. Të caktohen zgjidhjet e plota (x, y) të barazimit të Diofantit $x^2 - xy + y^2 = x + y$.

Zgjidhja: Barazimin e dhënë e zgjidhim sipas *x* dhe marrim

$$x^2 - xy + y^2 = x + y$$

$$x^2 - (y+1)x + y^2 - y = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{y+1 \pm \sqrt{(y+1)^2 - 4(y^2 - y)}}{2} = \frac{y+1 \pm \sqrt{-3y^2 + 6y + 1}}{2} .$$

Që *x*– të jetë numër real është e nevojshme dhe e mjaftueshme që $-3y^2 + 6y + 1 \geq 0$ pra që $y \in \left[\frac{3 - 2\sqrt{3}}{3}, \frac{3 + 2\sqrt{3}}{2} \right]$.

Meqë *y* është numër i plotë mbetet që $y = 0$ ose $y = 1$ ose $y = 2$.

Për $y = 0 \Rightarrow x = 0$ ose $x = 1$

Për $y = 1 \Rightarrow x = 0$ ose $x = 2$

Për $y = 2 \Rightarrow x = 1$ ose $x = 2$.

Bashkësia e zgjidhjeve është $Z = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,2), (2,1), (2,2)\}$.

13. Vërtetoni se gjatë pjesëtimit të numrit të thjeshtë me numrin 30 merret mbetja që është gjithashtu numër i thjeshtë.

Zgjidhja: Le të jetë *q* herësi kurse *r* mbetja që merret gjatë pjesëtimit të numrit të thjesht *p* me 30. Pra $p = 30q + r \quad (r < 30)$.

Duhet të tregojmë se *r* është numër i thjeshtë. Vërtetë sikur në të kundërtën *r* të jetë i përbërë ai ka faktor të përbashkët me numrin 30 dhe në këtë rast do të merrnim që edhe *p* është i përbërë që është në kundërshtim me supozimin. Pra mbetet që *r* të jetë i përbërë.

14. Të caktohen të gjithë numrat e plotë *a* për të cilët shprehja $\frac{a^n + 1}{a - 1}$ është numër i plotë.

Zgjidhja: Transformojmë shprehjen e dhënë si vijon

$$\frac{a^n+1}{a-1}=\frac{a^n-1+2}{a-1}=\frac{a^n-1}{a-1}+\frac{2}{a-1}$$

$$=a^{n-1}+a^{n-2}+\ldots+a+1+\frac{2}{a-1}$$

Duhet që $\frac{2}{a-1}$ të jetë numër i plotë e kjo është e mundur nëse $a-1\in\{-2,-1,1,2\}$ prej nga rrjedh se $a\in\{-1,0,2,3\}$.

15. Të caktohen të gjithë numrat natyror n për të clët numri $3(n^2+n)+7$ plotpjesëtohet me 5.

Me fjalë të tjera duhet të gjejmë ata numra n për të cilët

$$3(n^2+n)+7\equiv 0 \pmod 5.$$

Meqë çdo numër natyror mund të shkruhet në trajtën

$$n=5k,\ n=5k+1,\ n=5k+2,\ n=5k+3,\ n=5k+4.$$

shqyrtojmë kongruencat

1) $n\equiv 0 \pmod 5$; 2) $n\equiv 1 \pmod 5$; 3) $n\equiv 2 \pmod 5$
4) $n\equiv 3 \pmod 5$; 5) $n\equiv 4 \pmod 5$.

Zgjidhja:

1) Nëse $n\equiv 0 \pmod 5$ atëherë $n^2\equiv 0 \pmod 5$. Duke shfrytëzuar vetitë e kongruencës kemi:

$$n^2+n\equiv 0 \pmod 5$$

$$3(n^2+n)\equiv 0 \pmod 5$$

$$3(n^2+n)+7\equiv 7\equiv 2 \pmod 5.$$

2) Nëse $n\equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow n^2\equiv 1 \pmod 5$

$$n^2+n\equiv 2 \pmod 5$$

$$3(n^2+n)+7\equiv 13\equiv 3 \pmod 5$$

3) Nëse $n\equiv 2 \pmod 5 \Rightarrow n^2\equiv 4 \pmod 5$

$$3(n^2+n)+7\equiv 25\equiv 0 \pmod 5$$

4) $n\equiv 3 \pmod 5 \Rightarrow n^2\equiv 9 \pmod 5$

$$3(n^2+n)+7\equiv 43\equiv 3 \pmod 5)$$

5) $n\equiv 4 \pmod 5 \Rightarrow n^2\equiv 16 \pmod 5$

$$3(n^2+n)+7\equiv 67\equiv 2 \pmod 5$$

Nga rastet 1) – 5) vërejmë se për $n=5k+2,\ k\in\{0,1,2,...\}$ numri $3(n^2+n)+7$ plotpjesëtohet me 5.

16. Asnjë nga numrat a,b,c,d,e nuk plotpjesëtohet me 5. Vërtetoni se $a^4+b^4+c^4+d^4+e^4$ plotpjesëtohet me 5.

Zgjidhje: Numri x që nuk plotëpjesëtohet me 5 mund të shkruhet në një nga format vijuese:

$$x=5k\pm 1,\ x=5k\pm 2,\ x=5k\pm 3,\ x=5k\pm 4\ \ (k\in Z).$$

Lehtë tregohet se në secilin nga rastet e mësipërme vlejnë implikacionet

$$x\equiv \pm 1 \pmod 5 \Rightarrow x^4\equiv 1 \pmod 5$$

$$x\equiv \pm 2 \pmod 5 \Rightarrow x^4\equiv 16\equiv 1 \pmod 5$$

$$x\equiv \pm 3 \pmod 5 \Rightarrow x^4\equiv 81\equiv 1 \pmod 5$$

$$x\equiv \pm 4 \pmod 5 \Rightarrow x^4\equiv 276\equiv 1 \pmod 5$$

Në të gjitha rastet numri $x^4=5s+1,\ s\in Z$. Kështu për fuqitë e katërta të numrave a,b,c,d,e kemi:

$$a^4+b^4+c^4+d^4+e^4=(5s_1+1)+(5s_2+1)+(5s_3+1)$$

$$+(5s_4+1)+(5s_5+1)=5(s_1+s_2+s_3+s_4+s_5+1).$$

Pra $(a^4+b^4+c^4+d^4+e^4)\,\vdots\,5$ gjë që duhej treguar.

17. Të caktohen shifrat x dhe y ashtu që numri $\overline{1984xy}$ të plotëpjesëtohet me 8 dhe me 9.

Zgjidhje: Dihet se numri i dhënë plotëpjesëtohet me 9 nëse shuma e shifrave të tij plotëpjesëtohet me 9.

Pra që numri $\overline{1984xy}$ të plotëpjesëtohet me 9 duhet që $4+x+y$ tëplotëpjesëtohet me 9.

Pra mbetet që $x+y=5$ ose $x+y=14$.

Në anën tjetër numrin $\overline{1984xy}$ e shënojmë si vijon:

$$198400 + 10x + y = 8 \cdot 24800 + 8x + (2x + y)$$

Që numri i dhënë të plotëpjesëtohet me 8 duhet që $2x + y$ të plotëpjesëtohet me 8.

Nëse $x + y = 5$ atëherë $2x + y = x + 5$ plotëpjesëtohet me 8 nëse $x = 3$. Pra $x = 3,\ y = 2$. D.m.th. kemi numrin 198432.

Nëse $x + y = 14$ atëherë $2x + y = x + 14$ plotëpjesëtohet me 8 nëse $x = 2$ dhe $y = 12$ dhe detyra nuk ka zgjidhje.

18. Të caktohet shifra e fundit e numrit $7^{7^{7^7}}$.

Zgjidhja: Së pari vërejmë se numri 7^2 mund të paraqitet në trajtën $4k + 1$ (në këtë rast $k = 12$).

Numri 7^4 mund të paraqitet në trejtën $(4k + 1)(4k + 1) = 4k_1 + 1$.

Në përgjithësi numri 7^{2n} mund të paraqitet në trajtën $4k + 1$.

Tani $7^7 = 7 \cdot 7^6$ mund të paraqitet në trajtën

$$7(4k + 1) = 7 \cdot 4k + 4 + 3 = 4k_1 + 3.$$

Ngjashëm tregohet se numri 7^{7^7} mund të paraqitet në trajtën $4m + 3$.

Pra kemi:

$$7^{7^{7^7}} = 7^{4m+3} = 7^{4m} \cdot 7^3 \equiv 7^3 \equiv 3 \pmod{10} \qquad (1)$$

Në (1) shfrytëzuam faktin që

$$7^4 \equiv 1 \ (\text{mod}10) \Rightarrow 7^{4m} \equiv 1 \ (\text{mod}10).$$

Rezultati i arritur në (1) tregon se numri $7^{7^{7^7}} - 3$ plotpjesëtohet me 10, e kjo d.m.th. se shifra e fundit është 3.

19. Nëse *m* është numër i plotë atëherë edhe numri $\dfrac{m^3}{3} + \dfrac{m^2}{2} + \dfrac{m}{6}$ është numër i plotë.

Zgjidhja: Transformojmë së pari shprehjen e dhënë

$$\frac{m^3}{3} + \frac{m^2}{2} + \frac{m}{6} = \frac{2m^3 + 3m^2 + m}{6} = \frac{m(2m^2 + 3m + 1)}{6}$$

$$= \frac{m(m + 1)(2m + 1)}{6}.$$

Njëri nga numrat m, $m+1$ është çift. Dallojmë dy raste:

1) Njëri nga numrat m apo $m+1$ plotpjesëtohet me 3 dhe në këtë rast është e qartë se $m(m+1)(2m+1)\vdots 6$.

2) Asnjëri nga numrat m, $m+1$ nuk plotpjesëtohet me 3, Atëherë numri $m-1$ plotpjesëtohet me 3. Atëherë $m-1=3k \Rightarrow 2m+1 \ =3(2k+1)$ pra $2m+1$ plotpjesëtohet me 3. Pra $m(m+1)(2m+1)$ plotpjesëtohet me 6.

20. Të caktohen të gjitha treshet (a,b,c) të numrave natyror ashtu që $a^2+b^2=2^c$.

Zgjidhja: Nëse $a=b$ merret si vijon:

$$a^2+b^2=2a^2=2^c \Rightarrow a^2=2^{c-1}$$

$$\log_2 a^2=\log_2 2^{c-1} \Rightarrow 2\log_2 a=c-1$$

$$\log_2 a=\frac{c-1}{2} \Rightarrow a=2^{\frac{c-1}{2}}.$$

Meqë $a\in N$ mbetet që $a=2^k$, $k\in N\cup\{0\}$.

Pra $b=2^k$. Atëherë

$$2^{2k}=2^{c-1} \Rightarrow c=2k+1$$

Pra $(2^k, 2^k, 2k+1)$ është zgjidhje.

Le të jenë numrat a,b të ndryshëm të tillë që vlen relacioni $a^2+b^2=2^c$. Dallojmë rastet:

1) a – numër çift $(a=2m)$; b – numër tek $(b=2n+1)$. Kemi

$$(2m)^2+(2n+1)^2=2^c$$

$$4m^2+4m^2+4n+1=2^c$$

$$4(m^2+4n^2+n)+1=2^c$$

gjë që nuk është e saktë sepse në anën e majtë kemi numër tek e në anën e djathtë numër çift.

2) Ngjashëm tregohet nëse a – tek dhe b – çift.

3) Le të jenë numrat a,b numra tek, pra $a=2n+1,\ b=2n+1$. Atëherë

$$a^2+b^2=2^c \Leftrightarrow 4m^2+4m+1+4n^2+4n+1=2^c$$

$\Leftrightarrow 4k+2 = 2^c$ ku $k = m^2+m+n^2+n$, pra $k \in N$.

Pra kemi $2(2k+1) = 2^c \Rightarrow 2k+1 = 2^{c-1}$.

Barazimi i fundit është i mundshëm vetëm për $c=1$ dhe $k=0$. Pse? Në këtë rast $a=1,\ b=1$. Pse? Pra, kemi të njëtën zgjidhje $(1,1,1)$ e cila merret kur në zgjidhjen $(2^k,\ 2^k,\ 2k+1)$ merret $k=0$.

4) Sikur $a=2m,\ b=2n$ shprehja merr trajtën $m^2+n^2=2^{c-2}$. Duke bërë shqyrtimet si më sipër lehtë tregohet se $a=b$.

21. Nëse numri $2^{2^n}+1,\ n \in N$ është numër i thjeshtë, vërtetoni se ai nuk mund të paraqitet si ndryshim i fuqive të pesta të dy numrave natyror.

Zgjidhja: Supozojmë të kundërtën; pra se

$$2^{2^n}+1 = m^5-k^5 = (m-k)(m^4+m^3k+m^2k^2+mk^3+k^4)$$

Meqë $2^{2^n}+1$ është i thjeshtë mbetet që $m-k=1 \Rightarrow m=k+1$.

Atëherë

$$2^{2^n} = -1+(k+1)^5-k^5 = 5(k^4+2k^3+2k^2+k).$$

D.m.th. $2^{2^n} \vdots 5$. Tregojmë që kjo nuk është e saktë.

Mjafton të tregojmë se $2^n \vdots 5$ (nga kjo rrjedhë edhe pjesa e mësipërme).

Supozojmë të kundërtën, pra se $2^n \vdots 5$, d.m.th. $2^n = 5k$. Qartë se $k=2k_1$. Pra $2^n = 5\cdot 2k_1 \Rightarrow 2^{n-1} = 5k_1$. Qartë se $k_1 = 2k_2 \Rightarrow 2^{n-2} = 5k_2$. Duke vazhduar këtë proces merret $2 = 5k_s$ gjë që nuk është e saktë.
Pra numri i dhënë nuk mund të shkruhet si ndryshim i fuqive të pesta të dy numrave natyror.

22. Nëse d është pjesëtuesi më i madh i përbashkët për numrat e plotë a,b atëherë ekzistojnë numrat e plotë x,y të tillë që $ax+by=d$.

Zgjidhja: Shqyrtojmë bashkësinë $B=\{ax+by : x,y \in Z\}$. Kjo bashkësi përmban numra negativ, numra pozitiv si dhe zeron. Le të jetë $c=ax+by$ numri më i vogël pozitiv i bashkësisë B. Vërtetojmë se $c \mid a$. Supozojmë se c nuk e pjesëton numrin a. Atëherë ekzistojnë numrat e plotë q dhe r të tillë që

$$a = c\cdot q + r,\ \ 0 < r < c.$$

Kështu që $r = a - c \cdot q = a - q(ax + by) = (1 - qx)a - bqy$.

Lehtë shihet se numri *r* i takon bashkësisë *B*, gjë që është në kundërshtim me supozimin se *c* është numri më i vogël pozitiv nga bashkësia *B*. Pra $c \mid a$. Ngjashëm tregohet se $c \mid b$.

Tregojmë tani se *c* është pjesëtuesi më i madh i përbashkët i numrave a, b. Me fjalë të tjera tregojmë se $c = d$. Meqë $d = (a, b)$ mund të shkruajmë $a = pd$, $b = qd$ kështu që kemi:

$c = ax + by = pdx + qdy = d(px + qy)$. Kjo tregon se $d \mid c$ prandaj $d \le c$. Meqë sipas detyrës *d* është pjesëtuesi më i madh i përbashkët i numrave *a* dhe *b* nuk mund të jetë $d < c$, pra mbetet që $d = c$. D.m.th. $d = ax + by$, gjë që kompleton vërtetimin.

23. Vërtetoni se numrat $n,\ n+1,\ 2n+1$ (dy nga dy) në çiftë janë relativisht të thjeshtë.

Zgjidhja: Së pari përkujtojmë se numrat a, b janë relativisht të thjeshtë nëse $(a,b) = 1$.

Tregojmë se vlen $(a,b) = (a, a+b)$ (1)

Le të jetë $(a, a+b) = d$. Në bazë të detyrës paraprake, ekzistojnë numrat e plotë x, y të tillë që $ax + (a+b)y = d$, prej nga merret që $a(x+y) + by = d$. D.m.th. $(a,b) = d$.

Poashtu lehtë tregohet se $(n,1) = 1$. Pse?

Tani tregojmë se vlejnë relacionet: $(n, n+1) = 1$; $(n, 2n+1) = 1$ dhe $(n+1, 2n+1) = 1$.

Vërtetë nga (1) kemi $(n,1) = (n, n+1) = 1$.

$$(n, n+1) = (n, 2n+1) = 1 .$$

Meqë $(a,b) = (b,a)$ kemi $(n, n+1) = (n+1, n) = (n+1, 2n+1) = 1$.

24. Vërtetoni se $a^{2^n} + 1$ është pjesëtues i numrit $a^{2^m} - 1$, për $m > n$, dhe se për $a, m, n \in N,\ m \ne n$ vlen

$$(a^{2^m} + 1, a^{2^n} + 1) = \begin{cases} 2, & a - \text{numër tek} \\ 1, & a - \text{numër çift} \end{cases} .$$

Zgjidhja: Meqë $(a^{2^n} + 1) \cdot (a^{2^n} - 1) = a^{2^{n+1}} - 1$ përfundojmë se

$$(a^{2^n}+1)\,|\,(a^{2^{n+1}}-1) \qquad (1)$$

Tregojmë se $(a^{2^n}+1)\,|\,(a^{2^m}-1),$ ku $m>n,\ m,n\in N$.

Zbatojmë metodën e induksionit matematik.

Për $m=n+1$ pohimi është i saktë në bazë të vëtetimit të dhënë më (1).

Supozojmë se pohimi vlen për $m=n+p,\ p\in N,\ p>1$ i çfarëdoshëm, pra se

$$(a^{2^n}+1)\,|\,(a^{2^{n+p}}-1) \qquad \text{(h, i)}$$

Tregojmë se pohimi vlen për $m=n+p+1$. Kemi

$$a^{2^{n+p+1}}-1=a^{2^{n+p}\cdot 2}-1=(a^{2^{n+p}})^2-1=(a^{2^{n+p}}-1)(a^{2^{n+p}}+1)\ .$$

Në bazë të hipotezës induktive kemi:

$$(a^{2^n}+1)\overset{hi}{|}(a^{2^{n+p}}-1)\Rightarrow(a^{2^n}+1)\,|\,(a^{2^{n+p}}-1)(a^{2^{n+p}}+1)=a^{2^{n+p+1}}-1=a^{2^m}-1$$

gjë që duhej treguar.

Tregojmë tani pjesën tjetër të pohimit.

Nga pjesa e parë e detyrës kemi

$$a^{2^m}-1=k(a^{2^n}+1)\Rightarrow a^{2^m}=k(a^{2^n}+1)+1\,.$$

Pra,

$$a^{2^m}+1=k(a^{2^n}+1)+2 \text{ që është ekuivalente me}$$

$$(a^{2^m}+1)-k(a^{2^n}+1)=2\,.$$

Në bazë të detyrës 22 kemi që $(a^{2^m}+1,a^{2^n}+1)=2$. Tregoni që për a – çift vlen $(a^{2^m}+1,a^{2^n}+1)=1$.

25. Nëse a,b janë numra natyror vërtetoni se $a^n+b^n\le(a,b)^n+[a,b]^n$.

Zgjidhja: Vërtetojmë së pari pohimin vijues

Pohim. Nëse $a,b\in N$ atëherë $(a,b)[a,b]=a\cdot b$.

Vërtetim. Le të jetë S shumëfish i çfarëdoshëm i përbashkët i numrave a dhe b. Atëherë $S=k\cdot a,\ k\in N$. Meqë $b\,|\,S$ numri $\dfrac{ak}{b}$ duhet të jetë i plotë. Nëse $(a,b)=d$ atëherë $a=xd,\ b=yd$. Merret

$$\frac{ak}{b}=\frac{xk}{y},\ (x,y)=1.$$

Meqë $k=yt=\frac{b}{d}t,\ t\in N$ merret që $S=\frac{ab}{d}t,\ t\in N$.

Numri $S=\frac{ab}{d}t$ sipas supozimit është shumëfish i përbashkët i numrave a,b kurse shumëfishi më i vogël i përbashkët i numrave a,b merret për $t=1$. Pra $s=\frac{ab}{d}\Rightarrow a\cdot b=s\cdot d=(a,b)\cdot[a,b]$, gjë që duhej treguar.

Tani kthehemi në vërtetimin e detyrës. Vërejmë se $a\le S$ dhe $b\le S$.

Shqyrtojmë relacionin $d^n+s^n-a^n-b^n$ ku $d=(a,b),\ s=[a,b]$, dhe shfrytëzojmë relacionin e pohimit $d=\frac{ab}{s}$.

Kemi:

$$d^n+s^n-a^n-b^n=\left(\frac{ab}{s}\right)^n+s^n-a^n-b^n=\frac{a^nb^n+s^{2n}-a^ns^n-b^n}{s^n}$$

$$=\frac{(s^n-a^n)(s^n-b^n)}{s^n}\ge 0,\ \text{sepse}\ s^n\ge a^n,\ s^n\ge b^n$$

Pra $d^n+s^n-a^n-b^n\ge 0\Rightarrow a^n+b^n\le d^n+s^n=(a,b)^n+[a,b]^n$,

gjë që kompleton vërtetimin.

26. Tregoni se numrat 2^n-1 dhe 2^n+1, për $n>2$ nuk mund të jenë në të njëjtën kohë të thjeshtë.

Zgjidhja: Nëse 2^n-1 është i thjeshtë atëherë *n* është i thjeshtë sepse në të kundërtën, sikur *n* të jetë i përbërë, pra sikur $n=n_1\cdot n_2$, ku $1<n_1$, $n_2<n$ do të merrej $2^n-1=2^{n_1\cdot n_2}-1=(2^{n_1})^{n_2}-1$plotëpjestohet me numrin $2^{n_1}-1$. Pra *n* është numër i thjeshtë. Në anën tjetër oër çdo *n*–tek (pra edhe për çdo *n* të thjesht) numri 2^n+1 plotpjesëtohet me 3. Vërtetë le të jetë $n-2k+1$. Atëherë $2^n+1=2^{2k+1}+1=2\cdot 4^k+1$.

Shfrytëzojmë vetinë e kongruencave:

$$4^k\equiv 1\ (\text{mod}\ 3)$$

sepse

$$4^k - 1 = (4-1)(4^{k-1} + 4^{k-2} + ... + 1) = 3k \text{ ku } k = 4^{k-1} + 4^{k-2} + ... + 1$$

Atëherë

$$2 \cdot 4^k \equiv 2 \pmod 3.$$

Dhe në fund

$$2 \cdot 4^k + 1 \equiv 3 \pmod 3$$

që d.m.th. se numri $2 \cdot 4^k + 1 = 2^{2k+1} + 1$ plotpjesëtohet me 3, pra numri $2^n + 1$, për n – tek nuk mund të jetë i thjeshtë.

Në anë tjetër nëse numri $2^n + 1$ është i thjeshtë n do të duhet të jetë çift. (Shënim: jo për çdo numër çift $2^n + 1$ është i thjesht, p.sh. për $n = 5,\ 2^n + 1 = 3b\vdots 3,\ n = 6,\ 2^n + 1 = 65\vdots 5$ etj.).

Atëherë për n çift numri $2^n - 1$ plotëpjesëtohet me 3. Tregoni. Kjo përfundon pohimin.

27. Tregoni se katrori i numrit tek mund të shkruhet në formën $8p + 1$ (p numër natyror ose zero).

Zgjidhja: Le të jetë $x = 2k + 1$ numër tek. Atëherë

$$x^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1 = 8p + 1$$

sepse $k(k+1) = 2p$, gjë që duhej vërtetuar.

28. Nëse p është numër i thjeshtë, atëherë $8p^2 + 1$ është i thjeshtë vetëm për $p = 3$. Vërtetoni.

Zgjidhja: Për $p = 3$ numri $8p^2 + 1 = 73$ është numër i thjeshtë. Tregojmë që për $p \neq 3$ numri $8p^2 + 1$ është i përbërë.

Le të jetë p numër që nuk plotpjesëtohet me 3, pra $p = 3k \pm 1$.

Atëherë $8p^2 + 1 = 8(3k \pm 1)^2 + 1 = 3(24k^2 \pm 16k + 3)$, pra nëse $p = 3k \pm 1$, atëherë $8p^2 + 1$ është numër i përbërë. Pra $8p^2 + 1$ është i thjeshtë vetëm për $p = 3$.

Detyra për ushtrime

1. Tregoni se për asnjë numër të plotë *r*, shprehja $3^r + 1$ nuk plotpjesëtohet me 8.

2. Të caktohen të gjithë numrat treshifror të cilët pas pjesëtimit me 11 japin herësin të barabartë me shumën e katrorëve të shifrave të numrit të dhënë.
Rez. 550, 803

3. Nëse x, y janë numra tek atëherë $x^2 + y^2$ nuk është katrori i asnjë numri.

4. Tregoni se numri $3^{105} + 4^{105}$ plotpjesëtohet me 13.

5. Të caktohen të gjithë numrat e plotë *x* ashtu që $x^2 + 3x + 24$ të jetë katror i një numri.
Rez. $x_1 = 20$, $x_2 = -23$, $x_3 = 5$, $x_4 = -8$.

6. Për çfarë numra natyror *n* shuma e shifrave të numrit $n!$ është baraz me 9.
Rez. 6, 7, 8

7. Të gjitha zgjidhjet e plota pozitive të barazimit $x^2 + y^2 = z^2$ shprehen me formulat

$$\begin{aligned} x &= 2mrs \\ y &= m(r^2 - s^2) \\ z &= m(r^2 + s^2) \end{aligned} \qquad \text{ose} \qquad \begin{aligned} x &= m(r^2 - s^2) \\ y &= 2mrs \\ z &= m(r^2 + s^2) \end{aligned} \quad ,$$

ku $m, r, s \in N$. Vërtetoni.

8. Le të jetë *n* numër i plotë. Vërtetoni se nëse shprehja $2 + 2\sqrt{28n^2 + 1}$ është numër i plotë atëherë ajo paraqet katror të një numri.

9. Nëse x, y, z janë numra natyror të tillë që $x^2 + y^2 = z^2$, atëherë xyz plotpjesëtohet me 60. Vërtetoni.

10. Vërtetoni se ekzistojnë pambarim shumë numra natyror *n* të tillë që nëse $p \mid n^2 + 3$, ku *p* është numër i thjeshtë, atëherë ekziston $k < n$, ashtu që $p \mid k^2 + 3$.

11. Vërtetoni se numri $\underbrace{11\cdots1}_{100}\underbrace{22\cdots2}_{100}$ është prodhim i dy numrave të njëpasnjëshëm natyror.

12. Të zgjidhet barazimi $2x^2 + 5xy - 12y^2 = 28$ në bashkësinë e numrave natyror.
Rez. $(8,5)$.

13. Le të jenë a,b,c,d numra racional, x numër iracional. Çfarë kushti duhet të plotësojnë numrat a,b,c,d ashtu që $\dfrac{ax+b}{cx+d}$ të jetë numër racional?
Rez. $ad = bc$.

14. Të caktohen të gjithë numrat e thjeshtë p për të cilët $p^2 + 14$ është numër i thjeshtë.
Rez. $p = 3$

15. Të caktohen numrat racional x për të cilët $\log_2(x^2 - 4x - 1)$ është numër i plotë?
Rez. $x = -1$ dhe $x = 5$.

16. Le të jenë a,b,c,d numra të plotë. Nëse $ae + b$ dhe $ce + d$ plotpjesëtohen me k ($k \in Z \setminus \{0\}$), vërtetoni se $ad - bc$ plotpjesëtohet me k.

17. Të caktohet numri katërshifror $\overline{abcd}$ që plotëson kushtet

$$\overline{cda} - \overline{abc} = 297 \qquad (1)$$

$$a + b + c = 23 \qquad (2)$$

ku $a,b,c,d \in \{0,1,2,3,...,9\}$, $a \neq 0$.
Rez. 6898.

18. A ekzistojnë numrat natyror a,b,c,d që plotësojnë kushtet:

$$a \cdot b \cdot c \cdot d - a = \underbrace{11\cdots1}_{m} \qquad a \cdot b \cdot c \cdot d - b = \underbrace{11\cdots1}_{n}$$

$$a \cdot b \cdot c \cdot d - c = \underbrace{11\cdots1}_{p} \qquad a \cdot b \cdot c \cdot d - d = \underbrace{11\cdots1}_{q}$$

ashtu që $m,n,p,q \neq 0$. Rez. Jo

19. Vërtetoni se asnjë nga shifrat $2,4,7,9$ nuk është shifra e fundit e numrit $1 + 2 + 3 + ... + n$, $n \in N$.

20. Vërtetoni se $\sqrt{3}+\sqrt{19}$ është numër iracional.

21. Vërtetoni se shuma e kubeve të tre numrave të njëpasnjëshëm të plotë plotpjesëtohet me 9.

22. Të caktohen të gjithë numrat katërshifror $\overline{1abc}$ ashtu që

$$\overline{1abc}+\overline{cba1}=\overline{bbdd}\ .$$

Shënim. Shkronjave të ndryshme u përgjigjen numra të ndryshëm.

Rez. 1931, 1942, 1953, 1964, 1975, 1986.

23. Të caktohen të gjithë numrat e thjesht p ashtu që numrat $p+10$ dhe $p+14$ të jenë gjithashtu të thjeshtë.
Rez. $p=3$.

24. Le të jetë n numër natyror. Vërtetoni se numri $(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(n+n)$ plotpjesëtohet me 2^n por jo me 2^{n+1}.

25. Të caktohet shifra e fundit e numrit $19^{86}+86^{19}$. Rez. 7

26. Nëse m është numër i plotë, vërtetoni se $\dfrac{m^5}{5}+\dfrac{m^3}{3}+\dfrac{7m}{15}$ është poashtu numër i plotë.

27. Të caktohen dyshet (k,n) të numrave natyror ashtu që $2^k+1=5^n$.
Rez. $(2,1)$.

28. Të caktohen të gjithë numrat e thjeshtë p për të cilët numri 2^p+p^2 është numër i thjeshtë. Rez. $p=3$.

29. Le të jetë numri 2^n+n^2 i thjesht, ku $n\in N$ dhe $n\geq 2$. Vërtetoni se $n-3$ plotpjesëtohet me 6.

30. Nëse a dhe b janë numra të thjeshtë më të mëdhenjë se 3, atëherë $\dfrac{(a-b)(a+b)}{12}$ është numër i plotë. Vërtetoni.

31. Vërtetoni se $(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})(\sqrt{4-\sqrt{15}})$ është numër racional.

32. Të caktohen të gjithë numrat natyror *n* për të cilët $61 | 5^n - 4^n$.
Rez. $n = 3k,\ k \in Z$.

33. Të gjendet numri më i madh natyror d i cili është pjesëtues i secilit nga numrat $n(n+1)(2n+1996),\ \forall n \in N$.
Rez. $d = 12$.

34. Vërtetoni se për $n \in N \cup \{0\}$ numri $b = 19 \cdot 8^n + 17$ është i përbërë.

35. Kusht i nevojshëm dhe i mjaftueshëm që numrat e plotë a, b të jenë relativisht të thjeshtë është që të ekzistojnë numrat e plotë x, y të tillë që $ax + by = 1$. Tregoni.

36. Le të jenë a, b dy numra të njëpasnjëshëm të plotë dhe $n \in N$. Vërtetoni se $(an + b, bn + a)$ është numër tek.

37. Vërtetoni implikacionin

$$(a,c) = 1 \wedge (b,c) = 1 \Rightarrow (ab,c) = 1 .$$

38. Le të jetë $d = (a,b),\ b = \beta d$ dhe $n > 1$. Nëse β është numër tek tregoni se $(n^a + 1, n^b - 1) \le 2$.

39. Tregoni se barazimi $ax^2 + bx + c = 0$ nuk ka zgjidhje racionale nëse a, b, c janë numra tek.

40. Le të jetë $n \in N$ dhe $d \,|\, 2n^2$. A mundet numri $n^2 + d$ të jetë katror i një numri të plotë? Rez. Jo

41. Tregoni se për çdo numër natyror *k* ekziston numri natyror *n* ashtu që $n \cdot 2^k + 17$ të jetë katror i një numri.

42. Nëse p dhe $8p^2 + 1$ janë numra të thjeshtë, vërtetoni se edhe numri $8p^2 + 2p + 1$ është i thjeshtë.

43. Nëse $2^n + 1$ është numër i thjeshtë , atëherë $n = 2^k$. Vërtetoni.

44. Vërtetoni se $(1+2+...+n)\,|\,n!$ nëse $n+1$ nuk është numër tek i thjeshtë.

45. Vërtetoni se të gjithë numrat e trajtës $2^{2^n}+1 \quad (n>1)$ përfundojnë me shifrën 7.

46. Nëse $m\,|\,(m-1)!+1$ atëherë m është numër i thjeshtë. Vërtetoni.

47. Vërtetoni se numri $2222^{5555}+5555^{2222}$ plotpjesëtohet me 7.

48. Prodhimi i 100 numrave të njëpasnjëshëm natyror është ngritur në fuqinë e tetë. Cilat janë dy shifrat e fundit të numrit të marrë?

49. Për çfarë vlera të numrit natyror n, numri 2^n-1 paraqet katror të një numri. Po 2^n+1?

Rez. Për $n=1$, numri 2^n-1 paraqet katror të një numri.

Për $n=3$, numri 2^n+1 paraqet katror të një numri

50. Të caktohen numrat natyror n për të cilët $61\,|\,5^n-4^n$. Rez. $3\,|\,n$.

51. Të caktohen zgjidhjet e plota të barazimit $10x-7y=17$.

Rez. $x=1+7t, y=-1+10t \ (t\in Z)$

52. Le të jenë a,b dhe n numra natyror të tillë që $a>0, n>b$ dhe $a^n+b^n=c^n$. Tregoni se c nuk është numër i plotë.

53. Vërtetoni se nuk ekzistojnë numrat natyror të ndryshëm mes vete x dhe y të tillë që $x^{y^x}=y^{x^y}$.

54. Vërtetoni se katrori i numrit të plotë nuk mund të përfundojë me dy shifra 5.

55. Vërtetoni se $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ është numër iracional.

56. Vërtetoni se për çdo numër natyror n, numrat $21n+4$ dhe $14n+3$ janë relativisht të thjeshtë.

57. Të njehsohet shuma

$$1999^2-1998^2+1997^2-1996^2+...+3^2-2^2+1^2.$$

Rez. 1 999 000.

58. Vërtetoni se $n+\sqrt{n}$ është numër iracional, nëse n nuk është katror i asnjë numri të plotë.

59. Nëse $a^2+b^2=6ab$, (a,b numra të plotë pozitiv) atëherë $\frac{a+b}{a-b}$ është numër iracional. Vërtetoni.

III. BARAZIMET

Detyra 1. Të zgjidhet barazimi sipas x – it.

$$\frac{1}{ax-a^2}+\frac{1}{ax-ab}+\frac{1}{bx-ab}+\frac{1}{bx-b^2}=0$$

ku a,b janë parametra real.

Zgjidhja.

Transformojmë anën e majtë të barazimit

$$\frac{1}{ax-a^2}+\frac{1}{ax-ab}+\frac{1}{bx-ab}+\frac{1}{bx-b^2}=0$$

$$\frac{1}{a(x-a)}+\frac{1}{a(x-b)}+\frac{1}{b(x-a)}+\frac{1}{b(x-b)}=0$$

$$\frac{b(x-b)+b(x-a)+a(x-b)+a(x-a)}{ab(x-a)(x-b)}=0$$

$$\frac{b(2x-a-b)+a(2x-a-b)}{ab(x-a)(x-b)}=0$$

$$\frac{(a+b)(2x-a-b)}{ab(x-a)(x-b)}=0$$

Për $a\neq 0,\ b\neq 0,\ x\neq a,\ x\neq b$ kemi $2x-a-b=0\Rightarrow x=\dfrac{a+b}{2}$ është zgjidhja e barazimit të dhënë.

Detyrë plotësuese

1. Të zgjidhet barazimi $\dfrac{1}{x-a}+\dfrac{1}{x-b}+\dfrac{1}{bx-ab}+\dfrac{1}{ax-ab}=0$, ku $a,b,c\in R\,|\,a,b,c>1$. Tregoni se zgjidhja e barazimit plotëson mosbarazinë $x>1$.

Detyra 2. Është dhënë barazimi

$$\frac{2x}{a^3-8}-\frac{a}{a^2+2a+4}=\frac{x-1}{a-2}$$, ku a është numër real.

a) Të zgjidhet barazimi sipas x – it.

b) Për çfarë vlera të a–së zgjidhja e barazimit të dhënë është numër pozitiv?

c) Sa duhet të jetë a ashtu që zgjidhja e barazimit të jetë $x=0$?

Zgjidhja.

a) $$\frac{2x}{a^3-8}-\frac{a}{a^2+2a+4}=\frac{x-1}{a-2}$$

$$\frac{2x}{(a-2)(a^2+2a+4)}-\frac{a}{a^2+2a+4}-\frac{x-1}{a-2}=0$$

$$\frac{2x-a(a-2)-(x-1)(a^2+2a+4)}{(a-2)(a^2+2a+4)}=0\,.$$

Pas transformimit të shprehjes së fundit merret $x=\dfrac{4(a+1)}{a^2+2a+2}$, $a\neq 2$

b) $a>-1$

c) $a=-1$.

Detyra 3. Të zgjidhet barazimi $x+|x|=\dfrac{x}{|x|}$.

Zgjidhja.

Së pari vërejmë se x duhet të jetë i ndryshëm nga 0.

Dallojmë rastet:

1) Për $x<0, |x|=-x$. Barazimi i dhënë merr trajtën

$$x+(-x)=\frac{x}{-x}\Rightarrow 0=-1$$ që nuk është e saktë.

Kjo d.m.th. se për $x<0$ barazimi i dhënë nuk ka zgjidhje.

2) Për $x>0, |x|=x$. Atëherë kemi

$$x+x=\frac{x}{x}\Rightarrow 2x=1\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$ është zgjidhje e barazimit të dhënë.

Detyra 4. Të zgjidhet barazimi $|x^2-3|x|+1|=1$

Zgjidhja.

Barazimi i dhënë është ekuivalent me sistemin e barazimeve

$$\left.\begin{aligned} x^2-3|x|+1&=1\\ x^2-3|x|+1&=-1\end{aligned}\right\}$$

apo

$$x^2-3|x|=0 \qquad (1)$$

$$x^2-3|x|+2=0 \qquad (2)$$

Duke zgjidhur barazimin (1) marrim zgjidhjet

$$x_1=0,\ x_2=3,\ x_3=-3.$$

Duke zgjidhur barazimin (2) marrim zgjidhjet

$$x_4=-1,\ x_5=1,\ x_6=-2,\ x_7=2$$

Pra, bashkësia e zgjidhjeve është $Z=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$.

Detyra plotësuese

2. Le të jenë a,b,c numra real të tillë që a,b janë me shenja të kundërta, kurse c pozitiv. Të zgjidhet dhe të diskutohet barazimi

$$|ax^2+b|x|+c|=c.$$

Çka mund të konkludojmë nëse a,b janë me shenja të njëjta?

3. Të zgjidhet dhe të diskutohet barazimi

$$|ax^2+|bx+c||=c.$$

Detyra 5. Të caktohen të gjitha pikat e rrafshit (x,y) për koordinatat e të cilave vlen $|x|+|y|=1$.

Zgjidhja.

Dallojmë rastet

1) $x\ge 0,\ y\ge 0$. Atëherë barazimi merr formën $x+y=1$

2) $x\ge 0,\ y<0$ kemi $x-y=1$

3) $x<0,\ y\ge 0$ merret $-x+y=1$

4) $x<0,\ y<0$ merret $-x-y=-1$.

Pra, zgjidhje është katrori me kulmet $(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)$.

Paraqitja grafike

Detyrë plotësuese

4. Çka paraqet bashkësia e pikave të hapësirës (x,y,z) të tilla që $|x|+|y|+|z|=1$?

Detyra 6. Është dhënë barazimi $2x^2-(a+b)x+\sqrt{ab}\cdot(a+b-2x)=0$, ku a,b janë numra real. Vërtetoni se njëra zgjidhje e tij është e mesmja aritmetike e numrave *a* dhe *b* kurse zgjidhja tjetër është e mesmja gjeometrike e numrave *a* dhe *b*.

Zgjidhja.

Përkujtojmë se e *mesmja aritmetike* e dy numrave a,b është $\dfrac{a+b}{2}$, kurse e *mesmja gjeometrike* e tyre është $\sqrt{ab}$.

Transformojmë barazimin e dhënë

$$2x^2-(a+b)x+\sqrt{ab}\cdot(a+b-2x)=0$$

Merret

$$2x^2-(a+b)x+\sqrt{ab}\cdot(a+b)-2x\sqrt{ab}=0$$

$$2x^2-(a+b+2\sqrt{ab})x+\sqrt{ab}\cdot(a+b)=0$$

Së pari vërejmë se diskriminanta është baraz me

$$\begin{aligned}D&=(a+b+2\sqrt{ab})^2-8\sqrt{ab}(a+b)\\&=(a+b)^2+4\sqrt{ab}(a+b)+(2\sqrt{ab})^2-8\sqrt{ab}(a+b)\\&=(a+b)^2-4\sqrt{ab}(a+b)+(2\sqrt{ab})^2=(a+b-2\sqrt{ab})^2.\end{aligned}$$

Kështu kemi

$$x_{1,2}=\frac{(a+b+2\sqrt{ab})\pm(a+b-2\sqrt{ab})}{4}$$

Pra $x_1=\frac{a+b}{2}$, $x_2=\sqrt{ab}$, gjë që duhej treguar.

Detyrë plotësuese

5. Është dhënë barazimi $x^2(a+b)-2abx+\sqrt{ab}(2ab-(a+b)x)=0$, ku a,b janë numra real. Vërtetoni se njëra zgjidhje është e *mesmja gjeometrike* kurse tjetra e *mesmja harmonike* e numrave *a* dhe *b*.

Detyra 7. Të zgjidhet barazimi $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=3$.

Zgjidhja.

Transformojmë barazimin e dhënë si vijon

$$(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)=3$$

$$(x+1)(x+4)(x+2)(x+3)-3=0$$

$$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)-3=0\,.$$

Zëvendësojmë $x^2+5x=y$. Merret $(y+4)(y+6)-3=0$ përkatësisht barazimi $y^2+10y+21=0$ zgjidhjet e të cilit janë $y_1=-3$ dhe $y_2=-7$.

Prej këtu merret sistemi i barazimeve

$$\left.\begin{array}{l} x^2+5x=-3 \\ x^2+5x=-7 \end{array}\right\} \sim \left.\begin{array}{l} x^2+5x+3=0 \\ x^2+5x+7=0 \end{array}\right\} \tag{1}$$

Me zgjidhjen e barazimeve në (1) merret $x_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$, $x_{3,4}=\frac{-5\pm i\sqrt{3}}{2}$.

Detyra 8. Të zgjidhet barazimi $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+4\left(x+\frac{1}{x}\right)+6=0$.

Zgjidhja.

Zëvendësojmë $x+\frac{1}{x}=t$ **.** Atëherë $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$. Pra, merret barazimi $t^2-2+4t+6=0$, $(t+2)^2=0$ prej nga $t=-2$.

Pra $x+\frac{1}{x}=-2$. D.m.th.

$$x^2+1=-2x \Rightarrow x^2+2x+1=0 \Rightarrow (x+1)^2=0 \Rightarrow x=-1.$$

Detyrë plotësuese

6. Të zgjidhet barazimi $\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)-3\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+6\left(x+\frac{1}{x}\right)-7=0$.

Detyra 9. Të zgjidhet barazimi

$$(x^2+x+4)^2+8x(x^2+x+4)+15x^2=0$$

Zgjidhja.

Marrim zëvendësimin $y=x^2+x+4$. Merret barazimi

$$y^2+8xy+15x^2=0$$

Zgjidhim barazimin e fundit katror sipas y. Merret

$$y_{1,2}=\frac{-8x\pm\sqrt{64x^2-60x^2}}{2}=\frac{-8x\pm 2x}{2}$$

$$y_1=-3x;\ \ y_2=-5x$$

Pra kemi barazimet

$$x^2+x+4=-3x \qquad (1)$$

$$x^2+x+4=-5x \qquad (2)$$

Me zgjidhjen e barazimeve (1), (2) merret $x_{1,2}=-2$ dhe $x_{3,4}=-3\pm\sqrt{5}$.

Detyrë plotësuese

7. Të caktohen zgjidhjet e plota të barazimit

$$(y+2-x^2)^2+4(y+5-x^2)-8=0.$$

Detyra 10. Të zgjidhet barazimi $x^2+\frac{9x^2}{(x+3)^2}=27$.

Zgjidhja.

Shohim se ana e majtë paraqet shumë të dy katrorëve x^2 dhe $\left(\frac{3x}{x+3}\right)^2$ dhe kjo na "*sugjeron*" që të dy anëve të barazimit t'ia zbresim dyfishin e x–it dhe $\frac{3x}{x+3}$ në mënyrë që ana e majtë të jetë katror i plotë. Pra merret

$$x^2-2x\cdot\frac{3x}{x+3}+\left(\frac{3x}{x+3}\right)^2=27-2x\frac{3x}{x+3}$$

$$\left(x-\frac{3x}{x+3}\right)^2=27-6\cdot\frac{x^2}{x+3}$$

$$\left(\frac{x^2}{x+3}\right)^2+6\cdot\frac{x^2}{x+3}=27\,. \qquad (1)$$

Shënim: Këtu kuptojmë pse të dy anëve ua zbritëm $2x\cdot\frac{3x}{x+3}$ sepse është e qartë se katrori i plotë do të merrej edhe nëse të dy anëve do t'ia shtonim $2x\cdot\frac{3x}{x+3}$.

Në (1) zëvendësojmë $\frac{x^2}{x+3}=y$. Merret barazimi $y^2+6y-27=0$ me zgjidhjen e të cilit merret $y_1=-9,\ y_2=3$.

Pra merren barazimet $\frac{x^2}{x+3}=-9$ dhe $\frac{x^2}{x+3}=3$.

Pasi të zgjidhen merren zgjidhjet: $x_{1,2}=-\frac{9}{2}\pm\frac{i\cdot3\sqrt{3}}{2},\ x_{3,4}=\frac{3}{2}\pm\frac{3\sqrt{5}}{2}$.

Detyrë plotësuese

8. A ekziston numri real pozitiv a ashtu që të gjitha zgjidhjet e barazimit $x^2+\frac{a^2x^2}{(x+a)^2}=8$ të jenë reale?

Detyra 11. Të caktohen të gjitha zgjidhjet reale të barazimit

$$2(x^4-2x^2+3)(y^4-3y^2+4)=7\,.$$

Zgjidhja.

Vërejmë se $x^4-2x^2+3=(x^2-1)^2+2\geq 2$.

Po ashtu $y^4-3y^2+4=\left(y^2-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}\geq\frac{7}{4}$.

Pra $2(x^4-2x^2+3)(y^4-3y^2+4)\geq 4\cdot\frac{7}{4}=7$.

Shenja e barazimit vlen nëse $(x^2-1)^2+2=2$ dhe $\left(y^2-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{4}=\frac{7}{4}$ Atëherë $x=\pm1$ dhe $y=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Zgjidhjet janë: $\left(1,\frac{\sqrt{6}}{2}\right),\left(1,-\frac{\sqrt{6}}{2}\right),\left(-1,\frac{\sqrt{6}}{2}\right),\left(-1,-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$.

Detyrë plotësuese

9. Të zgjidhet barazimi $(x^4-4x^2+5)\cdot(x^8-2x^4y^2+y^4+1)=4$.

Detyra 12. Të caktohen të gjitha zgjidhjet e plota të barazimit $x^2+xy+y^2=1$.

Zgjidhja.

Transformojmë barazimin e dhënë

$$x^2+xy+y^2=1\Leftrightarrow x^2+2xy+y^2=1+xy$$

$$\Leftrightarrow(x+y)^2-1=xy\Leftrightarrow(x+y+1)(x+y-1)=xy.$$

Meqë x,y janë numra të plotë të tillë duhet të jenë edhe numrat $x+y+1$ dhe $x+y-1$. Në bashkësinë e numrave të plotë duhet të zgjidhen sistemet vijuese

$$x=0\wedge x+y+1=0$$

$$x=0\wedge x+y-1=0$$

$$y=0\wedge x+y+1=0$$

$$y=0\wedge x+y-1=0$$

$$x+y+1=x\wedge x+y-1=y$$

$$x+y+1=y\wedge x+y-1=x$$

$$x+y+1=-x\wedge x+y-1=-y$$

$$x+y+1=-y\wedge x+y-1=-x.$$

Pas zgjidhjes marrim që zgjidhjet e plota të barazimit të dhënë janë dyshet

$(0,-1), (-1,0), (0,1), (1,0), (1,-1), (-1,1)$.

Detyra plotësuese

10. Të zgjidhet barazimi $x + xy + y = 1$.

11. Të zgjidhet barazimi $x^4 + x^2 y + y^2 = 1$.

Detyra 13. Tregoni se barazimi $2x^2 - 9y^2 = 3$ nuk ka zgjidhje të plota.

Zgjidhja.

Barazimin e shkruajmë në formën $2x^2 = 9y^2 + 3$.

Shohim se në anën e majtë kemi numër çift e për këtë duhet që y^2 të jetë numër tek, pra y duhet të jetë tek. Le të shënojmë $y = 2k + 1$. Pas zëvendësimit merret

$$2x^2 = 9(2k+1)^2 + 3$$

$$2x^2 = 36k^2 + 36k + 12$$

$$x^2 = 18k^2 + 18k + 6 .$$

Tani shohim se në anën e djathtë kemi numër çift e për këtë x duhet të jetë çift.
Shënojmë $x = 2s$. Marrim

$$4s^2 = 18k^2 + 18k + 6$$

$$2s^2 = 9k(k+1) + 3$$

barazim që nuk është e saktë asnjëherë sepse në anën e majtë kemi numër çift e në anë e majtë numër tek.

Detyra 14. Është dhënë barazimi $x^2 + (2n+1)x + (2n-1) = 0,\ n \in N$. Tregoni se barazimi i dhënë nuk ka zgjidhje të plota.

Zgjidhja.

Shihet se

$$x_{1,2} = \frac{-(2n+1) \pm \sqrt{(2n+1)^2 - 4(2n-1)}}{2}$$

$$= \frac{-(2n+1) \pm \sqrt{4n^2 - 4n + 5}}{2} .$$

Në mënyrë që zgjidhjet $x_{1,2}$ të jenë të plota duhet që diskriminanta $D = 4n^2 - 4n + 5$ të jetë katror i një numri tek. Pse?

Pra $4n^2 - 4n + 5 = (2m+1)^2$, $m \in N$.

Pas transformimit merret

$$(2n-1)^2 + 4 = (2m+1)^2$$

$$(2m+1)^2 - (2n-1)^2 = 4$$

$$(2m+1-2n+1)(2m+1+2n-1) = 4$$

$$(m+n)(m-n+1) = 1 .$$

Barazimi i fundit nuk ka zgjidhje në bashkësinë e numrave natyror. Pse? E me këtë as barazimi fillestar nuk ka zgjidhje të plota.

Detyra plotësuese

12. Të caktohen të gjitha zgjidhjet e plota pozitive të barazimit

$$2x^3 + y = 71.$$

13. Tregoni se barazimi i mësipërm ka pambarim shumë zgjidhje të plota.

14. Tregoni se barazimi $x^2 - 2003 = 2004y$ nuk ka zgjidhje të plota.

Detyra 15. Të caktohen zgjidhjet e plota të barazimit $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$.

Zgjidhja.

Është e qartë se $x \neq 0,\ y \neq 0$. Transformojmë shprehjen e dhënë $\frac{1}{y} = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} \Rightarrow y = 2 + \frac{4}{x-2}$. Pra duhet që numri 4 të plotpjesëtohet me $x-2$.

Kjo vlen vetëm kur $x \in \{-2, 1, 3, 4, 6\}$. Atëherë marrim që $y \in \{1, -2, 6, 4, 3\}$.

Zgjidhjet e barazimit janë: $(-2,1),\ (1,-2),\ (3,6),\ (4,4),\ (6,3)$.

Detyrë plotësuese

15. Le të jenë x, y, z numra të plotë pozitiv. Të zgjidhet barazimi

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1.$$

Detyra 16. Të zgjidhet barazimi $\sqrt{x-\frac{1}{x}}-\sqrt{1-\frac{1}{x}}=1-\frac{1}{x}$, $x\neq 0$.

Zgjidhja.

Transformojmë barazimin

$$\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}-\sqrt{\frac{x-1}{x}}-\left(\sqrt{\frac{x-1}{x}}\right)^2=0$$

$$\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}\left(\sqrt{x+1}-1-\sqrt{\frac{x-1}{x}}\right)=0$$

$$\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}=0 \vee \sqrt{x+1}-\sqrt{\frac{x-1}{x}}-1=0$$

Duke zgjidhur barazimet e mësipërme merret $x_1=1,\ x_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Detyra 17. Të zgjidhet barazimi $(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x+(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x=4$.

Zgjidhja.

Transformojmë barazimin e dhënë

$$\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right)^x+(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x=4$$

$$\frac{1}{(2+\sqrt{3})^x}+(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x=4.$$

Zëvendësojmë $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x=t$. Merret barazimi $t+\frac{1}{t}=4$ me zgjidhjen e të cilit merret $t_1=2+\sqrt{3}$ ose $t_2=2-\sqrt{3}$

Nga zëvendësimi i marrë kemi:

$$(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x=2+\sqrt{3} \text{ ose } (\sqrt{2+\sqrt{3}})^x=2-\sqrt{3}.$$

Përfundojmë se $x=2$ ose $x=-2$. Pse?

Detyrë plotësuese

16. Le të jenë a,b numra real pozitiv të tillë që $a^2 - b = 1, a > \sqrt{b}$. Tregoni se zgjidhjet e barazimit $(\sqrt{a-\sqrt{b}})^x + (\sqrt{a+\sqrt{b}})^x = 2a$ janë të njëjta me ato të detyrës paraprake.

Detyra 18. Të zgjidhet barazimi $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3} = \sqrt[3]{12(x-1)}$.

Zgjidhja.

Duke i ngritur në fuqinë e tretë të dy anët e barazimit të dhënë merret:

$$x + 3\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt[3]{2x-3} + 3\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{(2x-3)^2} + 2x - 3 = 12(x-1)$$

i cili mund të shkruhet

$$x + 2x - 3 + 3\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{2x-3}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3}) = 12(x-1) \qquad (1)$$

Duke shfrytëzuar barazimin e dhënë shprehjen $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{2x-3}$ e zëvendësojmë me $\sqrt[3]{12(x-1)}$. Marrim:

$$3x - 3 + 3\sqrt[3]{x(2x-3)} \cdot \sqrt[3]{12(x-1)} = 12(x-1) \qquad (2)$$

$$\sqrt[3]{12x(2x-3)(x-1)} = 3(x-1)$$

$$12x(2x-3)(x-1) = 27(x-1)^3$$

$$(x-1)(4x(2x-3) - 9(x-1)^2) = 0$$

Zgjidhjet e barazimit të fundit janë: $x_1 = 1$ dhe $x_{2,3} = 3$.

Detyra 19. Të zgjidhet barazimi $\sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{15+x} = 2$.

Zgjidhja.

Le të shënojmë me $\begin{cases} u = \sqrt[4]{1-x} \\ v = \sqrt[4]{15+x} \end{cases} \qquad (1)$

Barazimi i dhënë kalon në trajtën $u + v = 2$.

Nga (1) kemi $\begin{cases} u^4 = 1 - x \\ v^4 = 15 + x \end{cases}$ (2)

Nga (2) kemi $u^4 + v^4 = 16$.

Kështu është fituar sistemi i ekuacioneve $\begin{cases} u + v = 2 \\ u^4 + v^4 = 16 \end{cases}$, me zgjidhjen e të cilit

marrim: $\begin{cases} u_1 = 0 \\ v_1 = 2 \end{cases}$; $\begin{cases} u_2 = 2 \\ v_2 = 0 \end{cases}$.

Problemi i dhënë sillet në zgjidhjen e bashkësisë së barazimeve $\begin{cases} \sqrt[4]{1 - x} = 0 \\ \sqrt[4]{15 + x} = 2 \end{cases}$;

$\begin{cases} \sqrt[4]{1 - x} = 2 \\ \sqrt[4]{15 + x} = 0 \end{cases}$, prej nga marrim se $x_1 = 1,\ x_2 = -15$.

Lehtë provohet se që të dy këto zgjidhje janë zgjidhje të barazimit të dhënë.

Detyra 20. Të zgjidhet barazimi

$$\left(\sqrt{\sqrt{x^2 - 5x + 8} + \sqrt{x^2 - 5x + 6}}\right)^x + \left(\sqrt{\sqrt{x^2 - 5x + 8} - \sqrt{x^2 - 5x + 6}}\right)^x = 2^{\frac{x+4}{4}}$$

Zgjidhja.

Zëvendësojmë $\left(\sqrt{\sqrt{x^2 - 5x + 8} + \sqrt{x^2 - 5x + 6}}\right)^x = a$

$$\left(\sqrt{\sqrt{x^2 - 5x + 8} - \sqrt{x^2 - 5x + 6}}\right)^x = b.$$

Merret $a + b = 2^{\frac{x+4}{4}}$ dhe $a \cdot b = 2^{\frac{x}{2}}$.

Duke ngritur në katror barazimin e parë dhe duke shfrytëzuar barazimin e dytë merret $a^2 + 2ab + b^2 = 2^{\frac{x+4}{4}}$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2^{\frac{x}{2}} \cdot 4$$

$$a^2 + 2ab + b^2 = 4 \cdot ab$$

$$(a - b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b.$$

Nga zëvendësimet e marra në fillim shohim se $a=b$ nëse

1) $x_1=0$

2) $\sqrt{x^2-5x+6}=0$, pra nëse $x_2=2,\ x_3=3$.

Pra $\{0,2,3\}$ janë zgjidhjet e kërkuara.

Detyrë plotësuese

17. Të zgjidhet barazimi

$$\left(\sqrt{\sqrt{x^2-5x+10}+\sqrt{4-y^2}}\right)^x+\left(\sqrt{\sqrt{x^2-5x+10}+\sqrt{y-2}}\right)^x=2^{x+1}.$$

Detyra 21. Të zgjidhet barazimi $x^{2\log x}=10x$.

Zgjidhja.

Vërejmë së pari se barazimi i dhënë është i përkufizuar për $x>0$. Pas logaritmimit me bazën 10 të të dy anëve të barazimit merret

$$2\log x\log x=1+\log x$$

$$2\log^2 x-\log x-1=0.$$

Zëvendësojmë $\log x=y$. Merret

$2y^2-y-1=0$ me zgjidhjen e të cilit merret $y_1=1$ dhe $y_2=-\frac{1}{2}$.

Prandaj merret $\log x=1$ dhe $\log x=-\frac{1}{2}$.

Përfundimisht kemi $x_1=10$ dhe $x_2=\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Detyrë plotësuese

18. Të zgjidhet barazimi $(x+y)^{\log x}=\frac{3}{2}y$.

Detyra 22. Të zgjidhet barazimi $2^{|x+2|}-|2^{x+1}-1|=2^{x+1}+1$.

Zgjidhja.

Vërejmë se duhet shqyrtuar tri raste:

1) Për $x\in(-\infty,-2]$

$$x+2\le 0 \Rightarrow |x+2| = -x-2$$

$$2^{x+1}-1<0 \Rightarrow |2^{x+1}-1| = 1-2^{x+1}$$

Kështu që barazimi merr formën

$$2^{-x-2}-1+2^{x+1}=2^{x+1}+1$$

$$2^{-x-2}=2 \Leftrightarrow -x-2=1 \Rightarrow x=-3$$

2) Për $x\in(-2,-1]$ merret

$$2^{x+2}-1+2^{x+1}=2^{x+1}+1$$

$$2^{x+2}=2 \Leftrightarrow x+2=1 \Rightarrow x=-1$$

3) Për $x\in(-1,\infty)$ merret

$$2^{x+2}-2^{x+1}+1=2^{x+1}+1$$

$$2^{x+2}=2\cdot 2^{x+1}$$

$$2^{x+2}=2^{x+2}$$

Pra në këtë rast, zgjidhje është çdo $x\in(-1,\infty)$.

Përfundimisht nga rastet 1), 2), 3) kemi zgjidhjet $x=-3$ dhe $x\ge -1$.

Detyrë plotësuese

19. Të zgjidhet barazimi $2^{|x+y-5|}+|2^{x+y}-32|=2^{x+y}-24$, ku x,y janë numra të plotë pozitiv të tillë që $x>y$.

Detyra 23. Të zgjidhet barazimi $\left(\frac{3}{5}\right)^x+\frac{7}{5}=2^x$.

Zgjidhja.

Le të paraqesim grafikisht funksionet $y_1=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\frac{7}{5}$ dhe $y_2=2^x$. Së pari vërejmë se $x=1$ është një zgjidhje e barazimit të dhënë.

Meqë y_1 është monotono zbritës kurse y_2 është monotono rritës, ato nuk mund të kenë pikëprerje tjetër veç pikës $x=1$ e për këtë edhe barazimi nuk ka rrënjë tjetër.

Paraqitja grafike

Detyra 24. Të zgjidhet barazimi $|x-1|^{\log^2 x - \log x^2} = |x-1|^3$.

Zgjidhja.

Lehtë tregohet se barazimi i dhënë është ekuivalent me $\log^2 x - \log x^2 = 3$ (pse?), me zgjidhjen e të cilit merret se $x_1 = 10^3$, $x_2 = 10^{-1}$. Po ashtu shihet qartë se edhe $x = 2$ është zgjidhje. Pse?

Detyra 25. Të zgjidhet barazimi $3^x + 4^x = 5^x$.

Zgjidhja.

Për $x = 2$ barazimi i dhënë vlen.

Për $x > 2$ vlen $3^x + 4^x = 3^2 \cdot 3^{x-2} + 4^2 \cdot 3^{x-2} < 3^2 \cdot 5^{x-2} + 4^2 \cdot 5^{x-2} = 5^x$. Pra për $x > 2$ barazimi nuk ka zgjidhje.

Ngjashëm tregoni se për $x < 2$ barazimi nuk ka zgjidhje.

Detyra 26. Të zgjidhet barazimi $\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot ... \cdot \log_n (n+1) = 2$.

Zgjidhja.

Shfrytëzojmë vetinë $\log_a b = \dfrac{\log b}{\log a}$

Pra, kemi

$$\log_2 3 \cdot \log_3 4 \cdot \log_4 5 \cdot ... \cdot \log_n (n+1) = 2$$

$$\frac{\log 3}{\log 2} \cdot \frac{\log 4}{\log 3} \cdot \frac{\log 5}{\log 4} \cdot ... \cdot \frac{\log(n+1)}{\log n} = 2$$

$\dfrac{\log(n+1)}{\log 2} = 2$. Lehtë tregohet se $n = 3$.

Detyrë plotësuese

20. Tregoni se barazimi $\log_3 2 \cdot \log_4 3 \cdot ... \cdot \log_{n+1} n = m$, nuk ka zgjidhje për asnjë vlerë $m \in N$.

Detyra 27. Të zgjidhet barazimi $\dfrac{\log x}{\log(x-a-a^2)} = 2,\ a \in R$.

Zgjidhja.

Së pari vërejmë se $x > 0,\ 0 < x - a - a^2 \neq 1$ (1)

Për a, x që plotësojnë (1) merret

$$x = (x - a - a^2)^2 \tag{2}$$

Transformojmë barazimin (2) dhe merret

$$x = (x - (a + a^2))^2$$

$$x = x^2 - 2x(a + a^2) + (a + a^2)^2$$

$$x^2 - x(2(a + a^2) + 1) + (a + a^2)^2 = 0 \tag{3}$$

Duke zgjidhur (3) merret

$x_1 = a^2,\ x_2 = (a+1)^2$. Diskutoni zgjidhjet!

Detyra plotësuese

21. Të zgjidhet dhe të diskutohet barazimi $\log_x (x - a + a^2) = 2,\ a \in R$.

22. Të zgjidhet barazimi $\log(x + y) = \log_{\sqrt{x+y}} x + \dfrac{1}{\log_y \sqrt{x+y}}$.

Detyra 28. Të zgjidhet barazimi $2^{[x]} = 2x + 1$, ku $[x]$-pjesa e plotë e *x*-it.

Zgjidhja.

Zëvendësojmë

$[x] = k,$ ku $k \in Z$

Në bazë të vetive të funksionit [*x*] – pjesa e plotë e *x*–it kemi

$k \le x < k + 1$.

Atëherë

$2k + 1 \le 2x + 1 < 2k + 3$.

Pra

$$2k + 1 \le 2^k < 2k + 3 . \tag{1}$$

Le të jetë $k \ge 0$.

Shohim se $k=0$ plotëson relacionin (1).

Meqë 2^k është numër i plotë mbetet që $2^k = 2k+2$ (2)

dhe $k=3$ është zgjidhje e vetme e (2) sepse $\forall k>3,\ 2^k > 2k+2$. Tregoni.

Për $k<0$ meqë funksioni $2^k > 0, \forall k$ mbetet që vetëm $k=-1$ të plotësojnë relacionin (2). Pse?

Kthehemi te ndryshorja fillestare dhe marrim

1) $[x]=0$, atëherë $1=2x+1 \Rightarrow x=0$

2) $[x]=3$, atëherë $8=2x+1 \Rightarrow x=\frac{7}{2}$

3) $[x]=-1$, pra $2x+1=\frac{1}{2} \Rightarrow x=-\frac{1}{4}$.

Përfundojmë se zgjidhjet e barazimit të dhënë janë $x=-\frac{1}{4},\ x=0,\ x=\frac{7}{2}$.

Detyra plotësuese

23. Të zgjidhet barazimi $x+[|x|]=\frac{x}{|[x]|},\ x\in R^+$.

Po nëse x është numër real negativ, çfarë mund të konkludojmë?

24. Le të jenë a,b katetet e trekëndëshit kënddrejtë me hipotenuzë c. Të zgjidhet barazimi $2^{[a+b]} = 2[a+b]+1$

Detyra 29. Të caktohen të gjitha dyshet e numrave natyror x,y për të cilët vlen $x!+3=y^2$.

Zgjidhja.

Në bazë të detyrës ____ të kapitullit të dytë kemi se y^2 nuk mund të ketë shifrën e fundit $2,3,7,8$. Në anën tjetër për $x\geq 5$ numri $x!$ përfundon me 0. Pse? Kështu që $x!+3$ përfundon me 3. D.m.th. për $x\geq 5$ barazimi nuk ka zgjidhje.

Mbetet shqyrtuar rastet për $x=0,1,2,3,4$.

Lehtë tregohet se zgjidhjet janë $x=1,\ y=2$ dhe $x=3,\ y=3$.

Pra, $(1,2),\ (3,3)$ janë dyshet e kërkuara.

Detyra 30. Vërtetoni se barazimi $\{x\}+\left\{\frac{1}{x}\right\}=1$ ka pambarim shumë zgjidhje.

Shënim. $(\{x\}=x-[x],\ [x]$ - pjesa e plotë e x–it) .

Zgjidhja.

Do të tregojmë se çdo interval $[n,n+1),\ n\geq 1\ (n\in N)$ përmban një zgjidhje të barazimit të dhënë.

Le të jetë $x\in[n,n+1)$ atëherë $x=n+\alpha$ ku $\alpha\in[0,1)$ dhe $\{x\}=\alpha$. Barazimi merr trajtën $\alpha+\frac{1}{n+\alpha}=1$. Pse $\left\{\frac{1}{n+\alpha}\right\}=\frac{1}{n+\alpha}$?

Duke zgjidhur barazimin e fundit sipas α, për $n\geq 1$ merret që $\alpha=\alpha(n)=\frac{1-n+\sqrt{n^2+2n-3}}{2}$ është zgjidhje e barazimit të dhënë dhe i takon intervalit gjysmë të hapur [0, 1). Tregoni.

DETYRA PËR USHTRIME

Të zgjidhen barazimet sipas *x*–it (a,b,c,m janë parametra real)

1. $\dfrac{x-ab}{a+b}+\dfrac{x-ac}{a+c}+\dfrac{x-bc}{b+c}=a+b+c$.

2. $\dfrac{x+b}{a+b}+\dfrac{x-b}{a-b}=\dfrac{b+x}{(a+b)^2}-\dfrac{x-b}{a^2-b^2}+\dfrac{2x}{a}$.

3. $\dfrac{2mx(m+1)+3x}{m^3-27}-\dfrac{x}{m-3}+\dfrac{x+1}{m^2+3m+9}=0$.

4. $(a+b)\left(a+\dfrac{x}{a-b}\right)-(a-b)\left(a-\dfrac{x}{a+b}\right)=2ax\left(\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{a+b}\right)$.

5. Të zgjidhet barazimi $|x|+|x-1|=1$.

6. Të zgjidhet barazimi

$|x^2-2x|+|x^2-1|-|x|+1=a$, ku a është parametër real.

7. Të zgjidhet barazimi $|x+1|+2|x+2|-3|x+4|=5$.

8. Të zgjidhet barazimi $||x-2|+||x|-1||=4$.

9. Nëse $x=3+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{x}}, y=3+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{3+\dfrac{1}{y}}}$, të caktohet $|x-y|$.

10. Është dhënë barazimi $2(a+b)x^2-(a+b)^2x-2ab(2x-a-b)=0$, ku a,b janë numra real. Vërtetoni se njëra zgjidhje është e mesmja aritmetike kurse tjetra e mesmja harmonike e numrave *a* dhe *b*.

11. Nëse barazimi

$$x^2+px+q=0 \tag{1}$$

(p, q janë numra real) ka zgjidhje reale atëherë edhe barazimi

$$x^2 + \left(k + \frac{1}{k}\right)px + p^2 + q\left(k - \frac{1}{k}\right)^2 = 0 \qquad (2)$$

(k është numër real) ka poashtu zgjidhje reale. Vërtetoni.

12. Të zgjidhet barazimi

$$x^4 - 2ax^2 + x + a^2 - a = 0$$

ku a është parametër real.

13. Të zgjidhet dhe të diskutohet barazimi

$$x^2 + k\,|\,x\,| + x + a = 0$$

(a, k, x janë numra real).

14. Të zgjidhet barazimi $x^2 - 5\,|\,x\,| + x - 1 = 0$.

15. Të caktohen b, c nëse rrënjët e barazimit $x^2 + bx + c = 0$ janë katrorët e rrënjëve të barazimit $x^2 + x + 1 = 0$.

16. Një student duhej të zgjidhte barazimin $x^2 + bx + c = 0$. Ai nga pakujdesia zgjidhi barazimin $x^2 + cx + b = 0$, ku b, c janë numra të plotë. Njëra nga rrënjët është e njëjtë me njërën rrënjë të barazimit të parë, gjersa tjetra është për m më e vogël se rrënja e barazimit të parë. Të caktohen b, c në funksion të m-it.

17. Nëse r_1, r_2 janë rrënjët e barazimit $x^2 + bx + c = 0$ dhe $S_2 = r_1^2 + r_2^2$, $S_1 = r_1 + r_2$, $S_0 = r_1^0 + r_2^0$ vërtetoni se $S_2 + bS_1 + cS_0 = 0$.

18. Të zgjidhet barazimi $\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) + 2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = 4$.

19. Të zgjidhet barazimi $x^2 + x + x^{-1} + x^{-2} = 4$.

20. Të zgjdhet barazimi $\dfrac{|\,x^2 - 4x\,| + 3}{x^2 + |\,x - 5\,|} = 1$.

21. Të zgjidhet barazimi $\left(\frac{x}{x+1}\right)^2+\left(\frac{x}{x-1}\right)^2=n(n-1)$, $n\in N$.

22. Të zgjidhet barazimi $\left(x+\frac{1}{x}-\frac{4}{x+\frac{1}{x}}\right)^2=\frac{81}{100}$.

23. Të caktohen zgjidhjet e plota të barazimit

$$\sqrt{-x^2+8x-15}+\frac{1}{\sqrt{-y^2+18y-77}}=\log_y(x+y-z).$$

24. Të caktohen zgjidhjet e plota të barazimit $(x+y)^2=(x+1)(y-1)$.

25. Të caktohen zgjidhjet e plota të barazimit $15x^2-7y^2=9$.

26. Të zgjidhet barazimi $2^x-3^y=7$ në bashkësinë e numrave të plotë.

27. Të zgjidhet barazimi në bashkësinë e numrave natyror

$$5^x+2^{x+1}\cdot 3^x=3^{2x}+2^{2x}.$$

28. Të zgjidhet barazimi $\sqrt{4x-y^2}-\sqrt{y+2}=\sqrt{4x^2+y}$.

29. Të zgjidhet barazimi në bashkësinë e numrave real pozitiv $x^{(x^x)}=(x^x)^x$.

30. Të zgjidhet barazimi $(\sqrt{7+\sqrt{48}})^x+(\sqrt{7-\sqrt{48}})^x=14$.

31. Të zgjidhet barazimi $\sqrt{|x^2-3x+2|}=2x+1$.

32. Të zgjidhet dhe të diskutohet barazimi $x-\sqrt{a-x^2}=1$, $a\in R$.

33. Të zgjidhet barazimi $\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{1-x^2}=\sqrt{(1+x)^2}$.

34. Të zgjidhet barazimi $\sqrt{k}+\sqrt[3]{k^2}=1512$.

35. Të zgjidhet barazimi $\sqrt[n]{(1+x)^2}-\sqrt[n]{(1-x)^2}=\sqrt[n]{(1-x^2)}$.

36. Të caktohet zgjidhja e plotë e barazimit

$$\underbrace{\sqrt{x+\sqrt{x+...+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}}_{100-\text{rrënjë}}=y\ .$$

37. Të zgjidhet barazimi $(\sqrt[3]{3-\sqrt{8}})^x+(\sqrt[3]{3+\sqrt{8}})^x=6$.

38. A ka zgjidhje barazimi $\sqrt{x^2\sqrt{x^2-1}}=-x$? Arsyetoni.

39. Të zgjidhet barazimi $\sqrt{\dfrac{\sqrt{x^2+28^2}+x}{x}}-\sqrt{x\sqrt{x^2+28}-x^2}=3$.

40. Të tregohet se $x=2$ është zgjidhje e vetme e barazimit

$$\sqrt[4]{x-1}+2\sqrt[3]{3x+2}=4+\sqrt{3-x}\ .$$

41. Vërtetoni ose mohoni:

Barazimi $\sqrt[7]{x}-\sqrt[5]{x}=\sqrt[3]{x}-\sqrt{x}$ ka saktësisht një zgjidhje.

42. Caktoni të gjithë numrat $x\geq 0$ që plotësojnë barazimin $x^{x\sqrt{x}}=(x\sqrt{x})^x$.

43. Për çfarë vlerash të parametrit real *a* barazimi

$$x^2+2ax\sqrt{a^2-3}+4=0$$

ka zgjidhje të dyfishtë?

44. Varësisht nga parametri *a* të zgjidhet barazimi

$$\frac{\sqrt{a+x}}{a}+\frac{\sqrt{a+x}}{x}=\sqrt{x}\ .$$

45. Të zgjidhet barazimi $\sqrt[5]{(x-2)(x-32)}-\sqrt[4]{(x-1)(x-33)}=1$.

46. Të zgjidhet barazimi $\sqrt{x\sqrt[5]{x}}-\sqrt[5]{x\sqrt{x}}=56$.

47. Të zgjidhet barazimi $\sqrt{x^{\log\sqrt{x}}}=10$

48. Të zgjidhet barazimi $a^{\frac{1}{\log a^2}}=x^{\frac{1}{2}\log_{\sqrt{x}}(x^2-x)}$.

49. Të zgjidhet barazimi $144^{|x|}-2\cdot 12^{|x|}+a=0,\ a\in R$.

50. Të zgjidhet barazimi $3^{x\log 5-1}-\dfrac{2}{5}=|5^{x\log 3+1}-24|$.

51. Të zgjidhet barazimi $x^{\log_{\sqrt{x}}2x}=4$.

52. Të zgjidhet barazimi $7x^{\frac{1}{\log_2^2 x^3}+\log_x 2}=5+(x+7)^{\frac{2}{\log_{\sqrt{2}}(x+7)}}$.

53. Të zgjidhet barazimi $(x^2-x-1)^{x^2-1}=1$.

54. Të zgjidhet barazimi $4^x+9^x+25^x=6^x+10^x+15^x$.

55. Të zgjidhet barazimi $x^{\log x}=1000x^2$.

56. Të zgjidhet barazimi $(3,(1)-1,(3))^{\log_{9x}x}=(4,(2)-2,(4))^{\log_x 9x}$

$(a,(b)=a,bbb...$ është numër periodik).

57. Të zgjidhet barazimi $\log_2^2 x-20\log_4 x+29=\dfrac{11}{\log_4^2 x-5\log_4 x+9}$.

58. Të zgjidhet barazimi

$\log_2^2(4x-10)+10\log_2(4x-10)+|\log_2(4x-10)|+18=0$ **.**

59. Të zgjidhet barazimi $\log_{x-3}(x+90)\cdot\log_x\sqrt[3]{x-3}=\dfrac{2}{3}$.

60. Të zgjidhet barazimi $\dfrac{\log(kx)}{\log(x+1)}=2,\ k\in R$.

61. Të zgjidhet barazimi sipas x–it $\log_a(a+\sqrt{a+x})=\dfrac{2}{\log_x a}$.

A kanë zgjidhje barazimet vijuese?

62. $\log(10-x^2)=\sqrt{x}+\sqrt{x+2}$.

63. $2^{\log_2(x-3)}=2x-5$.

64. $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^4+1}=4$.

65. $x^4+x^2+1=\log_{\frac{1}{3}}2$.

66. Të zgjidhet barazimi $m!+12=n^2$, $m,n\in\mathbb{N}$.

67. Të zgjidhet barazimi $2^{41}=2+\sum_{n=0}^{39}\log_{10}x^{2n}$.

68. Të zgjidhet barazimi $\left[\sqrt{x}\right]=\left[\sqrt[3]{x}\right], x\in\mathbb{R}$.

69. Vërtetoni se barazimi $(m+n)^{m+n}=m^n+n^n$ nuk ka zgjidhje në $\left(\mathbb{N}\setminus\{0\}\right)\times\left(\mathbb{N}\setminus\{0\}\right)$.

IV. MOSBARAZIMET

Detyra 1. Është dhënë barazimi kuadratik

$x^2 = (2-m)(2x-1)$, m–numër real.

Të caktohet vlera e m–it ashtu që rrënjët e barazimit të plotësojnë relacionin $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \leq 2$.

Zgjidhja.
Barazimin e dhënë e transformojnë në formën

$$x^2 = 4x - 2 - 2mx + m$$

$$x^2 + 2x(m-2) + (2-m) = 0 .$$

Zbatojmë formulat e Vietit dhe merret

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2(2-m) \\ x_1 \cdot x_2 &= 2-m \end{aligned}\right\} . \qquad (1)$$

Në anën tjetër relacionin $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} \leq 2$ mund ta shkruajmë në formën

$$\frac{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2}{x_1 \cdot x_2} \leq 2 . \qquad (2)$$

Zëvendësojmë (1) në (2) dhe marrim se $m \geq 1,\ m \neq 2$.

Detyra 2. Të caktohet parametri *a* ashtu që mosbarazimi

$$\frac{x+2a}{x^2+x+4} < \frac{x}{x^2+2x+5}$$

të vlejë për çdo *x*.

Zgjidhja.
Meqë $x^2 + x + 4$ dhe $x^2 + 2x + 5$ janë pozitive për çdo *x*, mosbarazimi

$$\frac{x+2a}{x^2+x+4}<\frac{x}{x^2+2x+5}$$ është ekuivalent me mosbarazimin:

$$(x+2a)(x^2+2x+5)<x(x^2+x+4)$$

$$x^3+2x^2+5x+2ax^2+4ax+10a<x^3+x^2+4x$$

$$x^2(1+2a)+x(1+4a)+10a<0 .$$

Që mosbarazimi të vlejë për çdo x duhet të plotësohen kushtet

$$\begin{cases} 1+2a<0 \\ D=(1+4a)^2-4(1+2a)\cdot 10a<0 \end{cases} .$$

$$\sim \begin{cases} a<-\frac{1}{2} \\ 64a^2+32a-1>0 \end{cases} \sim \begin{cases} a<-\frac{1}{2} \\ a\in\left(-\infty,\frac{-2-\sqrt{5}}{8}\right)\cup\left(\frac{-2+\sqrt{5}}{8},\infty\right) \end{cases} .$$

Përfundojmë se $a\in\left(-\infty,\frac{-2-\sqrt{5}}{8}\right)$.

Detyrë plotësuese

1. Të caktohet vlera e parametrit real a ashtu që mosbarazimi

$$\frac{x+\frac{a}{2}}{x^2-2x+\frac{1}{2}}<\frac{x+\frac{a}{4}}{x^2+2x+\frac{1}{2}}$$ të mos vlejë për asnjë $x\in\mathbb{R}$.

Detyra 3. Të zgjidhet mosbarazimi $|x^2-2x|+2x>2$.

Zgjidhja.
Mosbarazimi i dhënë merr formën:

$$|x^2-2x|+2x>2 \Leftrightarrow |x||x-2|+2x>2 .$$

Dallojmë rastet:

1) $x<0,\ |x|=-x,\ |x-2|=2-x$. Kemi

$$-x(2-x)+2x>2$$

$$x^2>2 \Rightarrow x\in(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty) .$$

Meqë në fillim cekëm se $x<0$ përfundojmë se $x\in(-\infty,-\sqrt{2})$.

2) Për $x\in[0,2)$, merret mosbarazimi

$x(2-x)+2x>2$

$2x-x^2+2x-2>0$

$x^2-4x+2<0$.

Pas zgjidhjes merret që $x\in(2-\sqrt{2},2+\sqrt{2})$.

Duke pas parasysh që $x\in[0,2)$ merret $x\in(2-\sqrt{2},2)$.

3) Për $x\geq 2$ merret mosbarazimi

$x(x-2)+2x>2$

$x^2>2,\ x\in(-\infty,-\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},+\infty)$.

Nën të njëjtat arsyetime si më lartë merret $x\in[2,\infty)$.

Përfundimisht $x\in(-\infty,-\sqrt{2})\cup(2-\sqrt{2},2)\cup[2,+\infty)$, përkatësisht $x\in(-\infty,-\sqrt{2})\cup(2-\sqrt{2},+\infty)$.

Detyra plotësuese

2. Të zgjidhet mosbarazimi $x^2-|3x+2|-x<3$.

3. Të zgjidhet mosbarazimi $|x^2-|x-2|-3|<3$.

Detyra 4. Të zgjidhet mosbarazimi $\dfrac{x^2-7|x|+10}{x^2-6x+9}<0$.

Zgjidhja.

Dallojmë rastet 1) $x<0$, 2) $x\geq 0$.

1) Për $x<0$, $|x|=-x$. Pra kemi mosbarazimin

$$\frac{x^2+7x+10}{x^2-6x+9}<0 \Leftrightarrow \frac{x^2+7x+10}{(x-3)^2}<0.$$

Shohim se duhet që $x\neq 3$. Poashtu $(x-3)^2>0,\ \forall x\neq 3$.

Pra, duhet që $x^2+7x+10<0$. Duke zgjidhur mosbarazimin e fundit merret që $x\in(-5,-2)$.

2) Për $x\geq 0$, $|x|=x$. Kemi

$$\frac{x^2-7x+10}{x^2-6x+9}<0 .$$

Për të njëjtat arsye si në rastin e parë duhet të vlejë

$$x^2-7x+10<0 .$$

Me zgjidhjen e mosbarazimit të fundit meret që $x\in(2,5)$. Meqë $x\neq 3$ përfundojmë se $x\in(2,3)\cup(3,5)$.

Përfundimisht $x\in(-5,-2)\cup(2,3)\cup(3,5)$.

Detyrë plotësuese

4. Të zgjidhet mosbarazimi $\dfrac{|x^4-3x^3+3x^2-3x+2|}{x^2-x+\frac{1}{4}}>0$.

Detyra 5. Të zgjidhet mosbarazimi $|x|+|y|\leq 1$.

Zgjidhja.
Dallojmë rastet:

1) $x\geq 0,\ y\geq 0$; 2) $x\geq 0,\ y\leq 0$;

3) $x\leq 0,\ y\geq 0$; 4) $x\leq 0,\ y\leq 0$.

1) Për $x\geq 0,\ y\geq 0$ mosbarazimi $|x|+|y|\leq 1$ kalon në trajtën $x+y\leq 1$. Meqë drejtëza e dhënë me barazimin $x+y=1$ pret në boshtet koordinative segmente të barabarta me 1, atëherë mosbarazimin $x+y\leq 1$ e plotësojnë pikat e trekëndëshit të kufizuar me boshtet koordinative si dhe drejtëzën $x+y\leq 1$ në kuadrantin e parë.

figurën.

Në mënyrë analoge shqyrtohen edhe tri rastet tjera. Zonat tjera në kuadrantet tjerë do të jenë simetrike me trekëndëshin e dhënë në figurën e mëposhtme.

Fig. ….

Detyra plotësuese

5. Të zgjidhet mosbarazimi $2 < |x-1| + |y-2| < 3$.

6. Të zgjidhet mosbarazimi $|x^2 + y^2 - 2x - 4y + 8| \leq 3$.

7. Të zgjidhet në bashkësinë e numrave natyror mosbarazimi

$$|x^2 + y^2 + z^2 - 2(x + 2y + 3z) + 14| < 6.$$

Detyra 6. Të zgjidhet mosbarazimi $\frac{1}{4}x > (\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1-x} + 1)$.

Zgjidhja.
Transformojmë mosbarazimin e dhënë

$$\frac{1}{4}x > (\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1-x} + 1)$$

$$\frac{1}{4}x(\sqrt{1+x} + 1) > (\sqrt{1+x} - 1)(\sqrt{1+x} + 1)(\sqrt{1-x} + 1)$$

$$\frac{1}{4}x(\sqrt{1+x} + 1) > (\sqrt{(1+x)^2} - 1)(\sqrt{1-x} + 1)$$

$$\frac{1}{4}x(\sqrt{1+x} + 1) > x(\sqrt{1-x} + 1)$$

$$x(\sqrt{1+x} + 1 - 4(\sqrt{1-x} + 1)) > 0$$

$$x(\sqrt{1+x} - 4\sqrt{1-x} - 3) > 0. \qquad (1)$$

Pyetje. Pse mund të shumëzojmë të dy anët e mosbarazimit me $\sqrt{1+x} + 1$ siç vepruam më lartë?

Mosbarazimi (1) është ekuivalent me sistemin e mosbarazimeve

$$\begin{cases} x > 0 \\ \sqrt{1+x} - 4\sqrt{1-x} - 3 > 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x < 0 \\ \sqrt{1+x} - 4\sqrt{1-x} - 3 < 0 \end{cases}.$$

Pas zgjidhjes së sistemeve të mësipërme merret që $x \in [-1, 0)$.

Detyrë plotësuese

8. Të zgjidhet mosbarazimi $\dfrac{x}{\sqrt{3x - 2 - x^2} - \frac{1}{2}} \geq \sqrt{3x - 2 - x^2} + \dfrac{1}{2}$.

Detyra 7. Të zgjidhet mosbarazimi $\frac{6x}{x-2}-\sqrt{\frac{12x}{x-2}}-2\sqrt[4]{\frac{12x}{x-2}}>0$.

Zgjidhje.

Së pari vërejmë se duhet të vlejë $\frac{12x}{x-2}>0$, pra $x\in(-\infty,0)\cup(2,\infty)$.

Marrim zëvendësimin $\frac{12x}{x-2}=y^4$. Merret mosbarazimi $\frac{1}{2}y^4-y^2-2y>0$.

Pas transformimit kemi $y(y-2)(y^2+2y+2)>0$.

Funksioni y^2+2y+2 është pozitiv për çdo y, pra mbetet që $y(y-2)>0$. Pas zgjidhjes merret $y\in(-\infty,0)\cup(2,\infty)$.

Kthehemi në ndryshoren fillestare dhe kemi $\sqrt[4]{\frac{12x}{x-2}}<0,\quad \sqrt[4]{\frac{12x}{x-2}}>2$.

Rasti $\sqrt[4]{\frac{12x}{x-2}}<0$ nuk ka zgjidhje kurse për rastin e dytë kemi si vijon

$\sqrt[4]{\frac{12x}{x-2}}<2\Leftrightarrow\frac{12x}{x-2}<16$. Pas zgjidhjes merret që $x\in(2,8)$.

Detyrë plotësuese

9. A ka zgjidhje në bashkësinë e numrave të plotë mosbarazimi

$$x-\frac{1}{2x}\cdot\frac{y+1}{y}>\frac{x}{y+1}+\sqrt{\frac{y+1}{2xy}}\ ?$$

Detyra 8. Për çfarë vlera të x–it vlen mosbarazimi $\frac{1-\sqrt{1-8x^2}}{2x}\leq 1$?

Zgjidhja.

Së pari shohim se duhet të vlejë $1-8x^2\geq 0$ dhe $x\neq 0$.

Pra $x\in\left[-\frac{1}{\sqrt{8}},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{\sqrt{8}}\right]$.

Për $x\in\left[-\frac{1}{\sqrt{8}},0\right)$ kemi $\frac{1-\sqrt{1-8x^2}-2x}{2x}\leq 0$. Qartë se në këtë rast duhet të vlejë $1-\sqrt{1-8x^2}-2x\geq 0$, përkatësisht $\sqrt{1-8x^2}\leq 1-2x$. Pse?

Për $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{8}}, 0\right)$ vlen $1-2x>0$. Pasi të ngrisim të dy anët e mosbarazimit në katror merret

$$1-8x^2 \le 1-4x+4x^2 \Leftrightarrow -12x^2+4x \le 0$$

$$\Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{1}{3}, \infty\right). \text{ Pra } x \in \left[-\frac{1}{\sqrt{8}}, 0\right).$$

Për $x \in \left(0, \frac{1}{\sqrt{8}}\right]$ pas transformimeve merret $\sqrt{1-8x^2} \ge 1-2x$, ku $1-2x>0$.

Duke vepruar si më sipër merret që $x \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$.

Përfundojmë se $x \in \left[-\frac{1}{8}, \frac{1}{3}\right) \setminus \{0\}$ është zgjidhje e mosbarazimit.

Detyra 9. Të zgjidhet mosbarazimi $\sqrt{a+\sqrt{x}} + \sqrt{a-\sqrt{x}} < \sqrt{2}$.

Zgjidhja.

Së pari shohim se $x \ge 0,\ a+\sqrt{x} \ge 0,\ a-\sqrt{x} \ge 0$, pra $0 \le x \le a^2$, $a \ge 0$. Nën këto kushte, të dy anët e mosbarazimit $\sqrt{a+\sqrt{x}} + \sqrt{a-\sqrt{x}} < \sqrt{2}$ janë pozitive, dhe pasi të ngriten në katror dhe pas transformimeve merret

$$\sqrt{a^2-x} < 1-a \qquad (1)$$

Nëse $a \ge 1$ mosbarazimi nuk ka zgjidhje. Pse?

Shqyrtojmë rastin për $0 \le a < 1$. Duke ngritur në katror të dy anët e relacionit (1) dhe pas transformimeve merret $x > 2a-1$. Po ashtu kemi $0 \le x \le a^2$. Është e qartë se $2a-1 \le a^2$.

Në vijim dallojmë dy raste:

1) Nëse $0 < a < \frac{1}{2}$, pra $2a-1 \le 0$. Në këtë rast zgjidhja do të jetë $0 \le x \le a^2$.

2) Nëse $\frac{1}{2} \le a < 1$, atëherë $2a-1 \ge 0$. Në këtë rast zgjidhja është $2a-1 < x \le a^2$.

Detyra 10. Të zgjidhet mosbarazimi $1 \le 2^{|x^2-x|} \le 4$.

Zgjidhja.
Mosbarazimi i dhënë është ekuivalent me sistemin

$$\begin{cases} 2^{|x^2-x|} \ge 1 \\ 2^{|x^2-x|} \le 4 \end{cases} \sim \begin{matrix} 2^{|x|\cdot|x-1|} \ge 2^0 \\ 2^{|x|\cdot|x-1|} \le 2^2 \end{matrix} \sim \begin{matrix} |x|\cdot|x-1| \ge 0 \\ |x|\cdot|x-1| \le 2 \end{matrix}.$$

Pas zgjidhjes merret që $x \in [-1,2]$.

Detyra plotësuese

10. Varësisht nga vlera e parametrit real a të zgjidhet mosbarazimi $1 \le a^{|x|} \le 16$.

11. Të zgjidhet mosbarazimi $1 \le [a]^{|x|} \le 36$.

12. Të zgjidhet mosbarazimi $1 \le a^{\left[x+\frac{1}{2}\right]} \le 81$.

13. Të zgjidhet mosbarazimi $(2+\sqrt{3})^x + (2-\sqrt{3})^x \ge 16$.

Detyra 11. Të zgjidhet mosbarazimi $\dfrac{6-3^{x+1}}{x} > \dfrac{10}{2x-1}$.

Zgjidhja.
Transformojmë mosbarazimin e dhënë

$$\frac{6-3^{x+1}}{x} > \frac{10}{2x-1} \Leftrightarrow \frac{6-3^{x+1}}{x} - \frac{10}{2x-1} > 0$$

Merret

$$\frac{(2x-1)(1-3^{x+1})-5}{x(2x-1)} > 0.$$

Mosbarazimi i dhënë është ekuivalent me sistemet:

$$\text{I)} \begin{cases} x(2x-1) > 0 \\ (2x-1)(1-3^{x+1})-5 > 0 \end{cases} \vee \text{ II)} \begin{cases} x(2x-1) < 0 \\ (2x-1)(1-3^{x+1})-5 < 0 \end{cases}.$$

Zgjidhim sistemin I).

Nga $x(2x-1) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty,0) \cup \left(\dfrac{1}{2},\infty\right)$.

Për këto vlera të x–it mosbarazimi i dytë i sistemit I) nuk ka zgjidhje. Vërtetë nëse $x \in (-\infty,0)$ atëherë $2x-1<0$ kurse $1-3^{x+1}>0$. Pse? Pra $(2x-1)(1-3^{x+1})<0$ kështu që shprehja $(2x-1)(1-3^{x+1})-5>0$ nuk është e saktë për asnjë vlerë $x \in (-\infty,0)$. Ngjashëm tregohet për $x \in \left(\frac{1}{2},\infty\right)$. Pra, sistemi I) nuk ka zgjidhje.

Zgjidhim tani sistemin II).

Nga $x(2x-1)<0 \Rightarrow x \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$. Vërejmë se çdo $x \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$ është zgjidhje e $(2x-1)(1-3^{x+1})-5<0$. Për këto vlera të x–it për $2x-1<0$ vlen $-1<2x-1<0$. Poashtu edhe shprehja $1-3^{x+1}$ është më e madhe se -5. Pse? Pra, prodhimi $(2x-1)(1-3^{x+1})<5$ kështu që përfundimisht $(2x-1)(1-3^{x+1})-5<0$. Pra $x \in \left(0,\frac{1}{2}\right)$ është zgjidhja e kërkuar.

Detyrë plotësuese

14. Tregoni se për asnjë $x \in \mathbb{R}$ mosbarazimi $\frac{3-2^{x+1}}{x} > \frac{3}{\sqrt{x-1}}$ nuk ka zgjidhje.

Detyra 12. Të zgjidhet mosbarazimi $(x^2+x+1)^x<1$.

Zgjidhja.

Diskriminanta e trinomit kuadratik x^2+x+1 është negative, dhe koeficienti pranë x^2 është pozitiv, prandaj konkludojmë se $x^2+x+1>0,\ \forall x \in R$. Kështu anën e djathtë e paraqesim në formën $(x^2+x+1)^0$. Mosbarazimi i dhënë paraqitet si vijon

$$(x^2+x+1)^x<(x^2+x+1)^0.$$

Kemi sistemet vijuese

$$\text{I)}\quad \begin{cases} x^2+x+1<1 \\ x>0 \end{cases} \qquad \text{II)}\quad \begin{cases} x^2+x+1>1 \\ x<0 \end{cases}.$$

Lehtë tregohet se sistemi I) nuk ka zgjidhje, kurse zgjidhje e sistemit II) (e në këtë rast edhe e mosbarazimit) është $x \in (-\infty,-1)$.

Detyra 13. Të zgjidhet mosbarazimi $|x+1|^{x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}}<1$.

Zgjidhja.
Në anën e majtë kemi funksion eksponencial, prandaj në bazë të vetive të funksionit eksponencial mosbarazimi vlen në dy rastet vijuese:

1) Nëse $|x+1|>1$ dhe $x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}<0$.

2) Nëse $0<|x+1|<1$ dhe $x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}>0$.

1) Për $|x+1|<1 \Rightarrow x\in(-\infty,-2)\cup(0,\infty)$. Nga $x\in(-\infty,-2)\cup(0,\infty)$ dhe duke zgjidhur mosbarazimin $x^2-\frac{5}{2}x+\frac{3}{2}<0$ merret që $x\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$.

2) Ngjashëm si nën (1) merret që $x\in(-2,-1)\cup(-1,0)$.

Përfundimisht $x\in(-2,-1)\cup(-1,0)\cup\left(1,\frac{3}{2}\right)$.

Detyra plotësuese

15. Le të jetë a numër real jonegativ. Të zgjidhet dhe të diskutohet mosbarazimi $|x-a|^{\sqrt{x^2-2ax+1}}<1$.

16. Të zgjidhet në bashkësinë e numrave natyror mosbarazimi
$$|x+y|^{\log_x y}<10.$$

Detyra 14. Të zgjidhet mosbarazimi $(2^x-1)^2-2\cdot|2^{x+1}-2|\leq 5$.

Zgjidhja.
Së pari vërejmë se $x\in(-\infty,\infty)$. Pse? Mosbarazimin e dhënë e shkruajmë si vijon

$$|2^x-1|^2-4\cdot|2^x-1|-5\leq 0.$$

Zëvendësojmë $y=|2^x-1|$ me ç’rast merret mosbarazim kuadratik $y^2-4y-5\leq 0$, me zgjidhjen e të cilit kemi $y\in[-1,5]$.

Meqë $y=|2^x-1|$ dhe meqë $y\geq 0$ marrim që $y\in[0,5]$.

Pra $0\leq|2^x-1|\leq 5$ që është ekuivalent me

$$\begin{cases} 2^x - 1 \geq -5 \\ 2^x - 1 \leq 5 \end{cases} \sim \begin{cases} 2^x \geq -4 \\ 2^x \leq 6 \end{cases}.$$

Mbetet që $2^x \leq 6$ sepse $2^x \geq 0,\ \forall x \in R$. Përfundojmë se $x \leq \log_2 6$.

Detyrë plotësuese

17. Të caktohen të gjitha dyshet (x, y) të numrave natyror të tillë që

$$(2^x - 1 - 3^y)^2 - |\, 2^x - 3^y \,| \leq 5.$$

Detyra 15. Të zgjidhet mosbarazimi $2^x \geq 11 - x$.

Zgjidhja.

Le të shënojmë $y_1 = 2^x$ dhe $y_2 = 11 - x$. Lehtë tregohet se y_1 është funksion monotono rritës kurse y_2 është monotono zvogëlues.

Është e qartë se $x = 3$ është zgjidhje e barazimit $2^x = 11 - x$.

Atëherë $[3, +\infty)$ është zgjidhje e mosbarazimit.

Fig.

Detyra 16. Të zgjidhet mosbarazimi $\log_{ax} a + 3\log_{a^2x} a > 0,\ (a > 1)$.

Zgjidhja.

Shfrytëzojmë formulën $\log_x y = \dfrac{1}{\log_y x}$. Mosbarazimi i dhënë kalon në trajtën

$$\frac{1}{\log_a ax} + \frac{3}{\log_a a^2x} > 0$$

$$\frac{\log_a a^2x + 3\log_a ax}{\log_a ax \cdot \log_a a^2x} > 0$$

$$\frac{2 + \log_a x + 3\log_a x + 3}{(1 + \log_a x) \cdot (2 + \log_a x)} > 0$$

$$\frac{5 + 4\log_a x}{(1 + \log_a x) \cdot (2 + \log_a x)} > 0.$$

Zëvendësojmë $y = \log_a x$. Merret $\dfrac{5+4y}{(1+y)\cdot(2+y)} > 0$.

Pas zgjidhjes së mosbarazimit të fundit dhe kthimit në ndryshoren e fillimit merret $x \in \left(\dfrac{1}{a^2}, \dfrac{1}{\sqrt[4]{a^5}}\right) \vee x \in \left(\dfrac{1}{a}, \infty\right)$.

Detyra plotësuese

18. Varësisht nga vlera e parametrave real a, b të zgjidhet dhe të diskutohet mosbarazimi $\log_{a+bx}(b^2x^2 - \sqrt{2x+1}) > 2$.

19. Le të jetë $a \in (0,1)$. Të zgjidhet mosbarazimi $\log_{a^{\log_x a}} x > \sqrt{x+1}$.

Detyra 17. Të zgjidhet mosbarazimit $x^{\log x} > 10$.

Zgjidhja.
Së pari vërejmë se $x > 0$. Pas logaritmimit të dy anëve të mosbarazimit me logaritëm me bazë 10 merret mosbarazimi $\log x^{\log x} > \log 10$ që është ekuivalent me mosbarazimin $\log^2 x > 1$ me zgjidhjen e të cilit merret që $x \in \left(0, \dfrac{1}{10}\right) \cup (10, \infty)$.

Detyrë plotësuese

20. Të zgjidhet mosbarazimi $(x+a)^{\log_a (x+a)} > a^3$, $a \in \mathbb{R}$.

Detyra 18. Të zgjidhet mosbarazimi $\log_b y > |6\log_y b - 1|$, nëse $0 < b < 1$.

Zgjidhja.
Shfrytëzohet fakti që $\log_b y = \dfrac{1}{\log_y b}$.

Zëvendësohet $\log_b y = u,\ y > 0,\ y \neq 1$ dhe mosbarazimi i dhënë shndërrohet në mosbarazimin $u > \left|\dfrac{6-u}{u}\right|$, me zgjidhjen e të cilit merret $y \in (0, b^2)$.

Detyra 19. Të zgjidhet mosbarazimi $\log_{x^2-3}(x-1)\geq 1$.

Zgjidhja.
Dallojmë rastet:

1) $x^2-3>1$, pra $x\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ kemi

$$x-1\geq x^2-3 \Rightarrow x^2-x-2\leq 0$$
$$\Rightarrow (x+1)(x-2)\leq 0 \Rightarrow x\in[-1,2].$$

Pra, në këtë rast mosbarazimi nuk ka zgjidhje.

2) Nëse $0<x^2-3<1$, d.m.th. për $3<x^2<4$ pra $x\in(-2,-\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},2)$ merret $0<x-1\leq x^2-3$. Pas zgjidhjes përfundojmë se as në këtë rast detyra nuk ka zgjidhje.

Përfundojmë se mosbarazimi i dhënë nuk ka zgjidhje.

Detyrë plotësuese

21. Le të jenë $f(x), g(x)\neq 0$. Vërtetoni ose mohoni:
Nëse mosbarazimi $\log_{f(x)} g(x)\geq 1$ nuk ka zgjidhje atëherë as mosbarazimi $\log_{g(x)} f(x)<1$ nuk ka zgjidhje.

DETYRA PËR USHTRIME

1. Është dhënë barazimi kuadratik $4x^2=(3-a)(2x-1),\ a\in R$.

Të caktohet *a* ashtu që rrënjët $x_1,\ x_2$ të plotësojnë mosbarazinë

$$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}\le 3.$$

2. Të zgjidhet mosbarazimi $ax^2-2x+4>0$.

3. Të zgjidhet dhe të diskutohet mosbarazimi

$$\frac{x^2+1}{a^2x-2a}-\frac{1}{2-ax}>\frac{x}{a}.$$

4. Të zgjidhet mosbarazimi $\dfrac{4(x-3)}{x^2+x-2}\ge\dfrac{-3(x+3)}{2x^2-3x-5}$.

5. Të zgjidhet mosbarazimi $\dfrac{1}{|x|}-x>2$.

6. Të caktohet *k* ashtu që për çdo *x* të vlejë $\left|\dfrac{x^2-kx+1}{x^2+x+1}\right|<3$.

7. Të zgjidhet mosbarazimi $||x-2|-x+3|<5$.

8. Të zgjidhet mosbarazimi $\left|\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+4}\right|+\left|\dfrac{x-1}{x-2}\right|-12<0$.

9. Nëse $a>0$, të caktohet zona në sistemin kënddrejtë koordinativ të Dekartit pikat e së cilës (x,y) plotësojnë kushtin $||x+a|-|y-a||<a$.

10. Të caktohet parametri λ ashtu që mosbarazimi $\left|\dfrac{(\lambda+2)x}{x^2-x+1}\right|<1$ të plotësohet për çdo $x\in\mathbb{R}$.

Të zgjidhen mosbarazimet:

11. $|x^2+3x-1|>|x^2-x-3|$.

12. $|x^2-3x+1|>|x^2+x-5|$.

13. $\dfrac{2}{2+\sqrt{4-x^2}}+\dfrac{1}{2-\sqrt{4-x^2}}>\dfrac{1}{x}$.

14. $\dfrac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x-3}>\dfrac{5}{\sqrt{x-3}}$.

15. $\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}>a$.

16. $\sqrt{x^2+y^2-2}>x-y$.

17. $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}<1$.

18. $\sqrt{|1-2x|}\geq 1+x$.

19. $|\sqrt{y-a}+1|\geq\sqrt{y-a}-1$.

20. $|x-3|^{2x^2-7}>1$.

21. $\dfrac{2^{x+1}-7}{x-1}<\dfrac{10}{3-2x}$.

22. $(x+3)^{x^2-5x+6}>1$.

23. $|x|^{x^2-x-2}<1$.

24. $|x-3|^{2x^2-7x}<1$.

25. $(4x^2+12x+10)^{|x^2-5x+2|}\geq(4x^2+12x+10)^{x-2}$.

26. $|x+2|^{(x^2-2)}<(x+2)^{|x|}$.

27. $|x^2-2x-1|^{3x-1}\leq(x-1-\sqrt{2})^{3x+1}$.

28. $|x-1|^{\log_2(4-x)}>|x-1|^{\log_2(1+x)}$.

29. $(8-x)^{\log_2^2(8-x)}\leq 2^{3x-4}$.

30. $\log(5^x+x-20)>x-x\log 2$.

31. $x^{\log_a x}<a$.

32. $|x-1|^{\log_2(4-x)}>|x-1|^{\log_2(1+x)}$.

33. $|\log(x+2)|-|\log(x+3)-1|>\log 2$.

34. $\left|\log\dfrac{x^2}{100}\right|-\left|\log\dfrac{(x-1)^2}{10}\right|\leq\log 3$.

35. $\log_{\frac{1}{2}}2x-|\log_{\frac{1}{2}}x|-2<0$.

36. $\left|\log_5\dfrac{x+3}{x-4}\right|>1$.

37. Është dhënë mosbarazimi

$$\left(2-\log_2 \frac{y}{y+1}\right)x^2+\left(1+\log_2 \frac{y}{y+1}\right)2x-2\left(1+\log_2 \frac{y}{y+1}\right)>0 .$$

Të caktohet numri real y ashtu që mosbarazimi të vlej për çdo $x \in R$.

Të zgjidhen mosbarazimet:

38. $\dfrac{x-1}{\log_3(9-3^x)-3} \le 1$.

39. $\dfrac{2+\log_3 x}{x-1} < \dfrac{6}{2x-1}$.

40. $\log_x (x-a) > 2$.

41. $1+\log_x \dfrac{4-x}{10} < (\log\log a - 1)\log_x 10$.

42. $\log_{\frac{x}{5}} (x^2-8x+16) \ge 0$.

43. $\log_{\frac{1}{x}} (2-x) \ge \log_{\frac{1}{x}} (x+1)$.

44. $\log_{x+1}(x-1) < \log_{x+1}(x+2)$.

45. $\log_{\frac{1}{2}} x + \sqrt{1-\log^2_{\frac{1}{2}} x} \le 1$.

46. $\log_{(2x^2-x)}(2x+2) < 1$.

47. $\log_{\frac{x^2+2x-3}{5}}\left(\dfrac{|x+4|-|x|}{x-1}\right) > 0$.

V. IDENTITETET

Detyra 1. Vërtetoni se vlejnë formulat vijuese:

a) $$\frac{a+b+|b-a|}{2}=\max(a,b);$$

b) $$\frac{a+b-|b-a|}{2}=\min(a,b),\quad a,b\in R.$$

Zgjidhja.

a) Le të jetë $\max(a,b)=a$. Atëherë $|b-a|=a-b$. Pse?

Pra $\frac{a+b+|b-a|}{2}=\frac{a+b+a-b}{2}=\frac{2a}{2}=a=\max(a,b)$.

Nëse $\max(a,b)=b$, atëherë $|b-a|=b-a$. Pra

$$\frac{a+b+|b-a|}{2}=\frac{a+b+b-b}{2}=b=\max(a,b).$$

Ngjashëm tregohet nën b).

Detyra 2. Të vërtetohet se për çdo $n\in\mathbb{N}$ vlen identiteti

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}.$$

Zgjidhja.

Termin (anëtarin) e përgjithshëm $\frac{1}{n(n+1)}$ e shënojmë si vijon

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{A}{n}+\frac{B}{n+1}. \qquad (1)$$

Të dy anët e (1) i shumëzojmë me $n(n+1)$. Merret

$$1=A(n+1)+Bn$$

$$1=(A+B)n+A \qquad (2)$$

Nga (2) merret që $A=1,\ B=-1$. Pra

$$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

Kështu ana e majtë transformohet si vijon

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ ...\ +\frac{1}{n(n+1)}=$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ ...\ +\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$, gjë që duhej treguar.

Detyra 3. Nëse n është numër natyror, vërtetoni barazinë

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2n-3}+\ ...\ +\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{n}\cdot\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ ...\ +\frac{1}{2n-1}\right)$$

Zgjidhja.
Transformojmë anën e majtë

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2n-3}+\ ...\ +\frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{1}=\frac{1}{2n}\cdot\left(\frac{2n}{(2n-1)}+\frac{2n}{3(2n-3)}+\ ...\ +\frac{2n}{2n-1}\right)$$

$$=\frac{1}{2n}\left(\frac{(2n-1)+1}{2n-1}+\frac{(2n-3)+3}{3(2n-3)}+\ ...\ +\frac{1+(2n-1)}{(2n-1)}\right)$$

$$=\frac{1}{2n}\left(1+\frac{1}{2n-1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2n-3}+\ ...\ +\frac{1}{2n-1}+1\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ ...\ +\frac{2n}{2n-1}\right).$$

Detyra 4. Le të jetë $a\neq\pm1$ dhe n – numër natyror. Vërtetoni se vlen

$$\left(\frac{a^n}{1-a^{-n}}+\frac{a^{-n}}{1+a^{-n}}\right)-\left(\frac{a^n}{1+a^{-n}}+\frac{a^{-n}}{1-a^{-n}}\right)=2\ .$$

Zgjidhja.
Transformojmë shprehjen e dhënë si vijon

$$\frac{a^n}{1-a^{-n}}+\frac{a^{-n}}{1+a^{-n}}-\frac{a^n}{1+a^{-n}}-\frac{a^{-n}}{1+a^{-n}}$$

$$=\left(\frac{a^n}{1-a^{-n}}-\frac{a^n}{1+a^{-n}}\right)+\left(\frac{a^{-n}}{1+a^{-n}}-\frac{a^{-n}}{1-a^{-n}}\right)$$

$$=a^n\left(\frac{1}{1-a^{-n}}-\frac{1}{1+a^{-n}}\right)+a^{-n}\left(\frac{1}{1+a^{-n}}-\frac{1}{1-a^{-n}}\right)$$

$$=a^n\left(\frac{1+a^{-n}-1+a^{-n}}{(1-a^{-n})(1+a^{-n})}\right)+a^{-n}\left(\frac{1-a^{-n}-1-a^{-n}}{(1+a^{-n})(1-a^{-n})}\right)$$

$$=\frac{2}{1-a^{-2n}}-\frac{2a^{-2n}}{1-a^{-2n}}=\frac{2(1-a^{-2n})}{1-a^{-2n}}=2$$, gjë që duhej treguar.

Detyra 5. Vërtetoni identitetin (*Identiteti i Lagranzhit*)

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}},\ (a>0,b>0,a^2>b)\ .$$

Zgjidhja.
Le të ngrisim në katror të dy anët e barazisë. Merret

$$a\pm\sqrt{b}=\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}\pm 2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\cdot\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}+\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}$$

$$=\frac{a+\sqrt{a^2-b}+a-\sqrt{a^2-b}}{2}\pm 2\sqrt{\frac{a^2-\sqrt{(a^2-b)^2}}{4}}$$

$$=a\pm 2\sqrt{\frac{b}{4}}=a\pm\sqrt{b}$$, gjë që duhej treguar.

Detyrë plotësuese

1. Vërtetoni ose mohoni pohimin:

Le të jenë a,b,c numra real të tillë që $a>0,b>0,c>0,a^2>b+c$.

Atëherë vlen

$$\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-(b+c)}}{2}}\right)^3-\left(\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-(b+c)}}{2}}\right)^3=\sqrt{a-\sqrt{b+c}}\left(a+\frac{\sqrt{b+c}}{2}\right).$$

Detyra 6. Nëse $\log_a x=p,\ \log_b x=q$ dhe $\log_{abc} x=r$ vërtetoni se

$$\log_c x=\frac{pqr}{pq-pr-qr}\ .$$

Zgjidhja.

Meqë $r=\log_{abc}x \Rightarrow \dfrac{1}{\log_x abc}=\dfrac{1}{\log_x a+\log_x b+\log_x c}=\dfrac{1}{\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{\log_c x}}$

prej nga pas transformimeve merret $\log_c x=\dfrac{pqr}{pq-pr-qr}$ gjë që duhej treguar.

Detyra 7. Nëse $\log_{12}24=x,\ \log_{18}54=y$ vërtetoni se $5(x+y)-3xy=8$.

Zgjidhja.

$x=\log_{12}24=\log_{12}12+\log_{12}2=1+\dfrac{1}{\log_2 12}=1+\dfrac{1}{2+\log_2 3}=\dfrac{3+\log_2 3}{2+\log_2 3}$ prej nga marrim që $\log_2 3=\dfrac{2x-3}{1-x}$.

$y=\log_{18}54=1+\log_{18}3=1+\dfrac{1}{\log_3 18}=1+\dfrac{1}{2+\log_3 2}=\dfrac{3+\log_3 2}{2+\log_3 2}$ prej nga kemi $\log_3 2=\dfrac{2y-3}{1-y}$.

Tani meqë $\log_2 3=\dfrac{1}{\log_3 2}$ kemi $\dfrac{2x-3}{1-x}=\dfrac{1-y}{2y-3}$.

Pas transformimeve merret që $5(x+y)-3xy=8$.

Detyra 8. Vërtetoni identitetin $n=-\log_3\left(\log_3\underbrace{\sqrt[3]{\sqrt[3]{\ldots\sqrt[3]{3}}}}_{n-\text{herë}}\right)$.

Zgjidhja.
Shfrytëzojmë vetitë e logaritmeve

$$-\log_3\cdot\log_3\sqrt[3]{\sqrt[3]{\ldots\sqrt[3]{3}}}=x \Leftrightarrow 3^{-x}=\log_3\sqrt[3]{\sqrt[3]{\ldots\sqrt[3]{3}}}$$

$$\Leftrightarrow 3^{3^{-x}}=\sqrt[3]{\sqrt[3]{\ldots\sqrt[3]{3}}} \Leftrightarrow 3^{\left(\frac{1}{3}\right)^x}=3^{\left(\frac{1}{3}\right)^n} \Leftrightarrow n=x.$$

Detyrë plotësuese

2. Vërtetoni ose mohoni pohimin. Për çdo $k\in\mathbb{N}$ vlen identiteti

$$n=-\log_k\left(\log_k\underbrace{\sqrt[k]{\sqrt[k]{\ldots\sqrt[k]{k}}}}_{n-\text{here}}\right),\ n\in\mathbb{N}.$$

Detyra 9. Nëse $a>0$ dhe $a\neq 1$ vërtetoni se vlen

$$\log_a \mathrm{tg}1^\circ + \log_a \mathrm{tg}2^\circ \cdot \ldots \cdot \log_a \mathrm{tg}89^\circ = 0$$

Zgjidhja.
Shfrytëzojmë vetinë e logaritmit $\log_a x + \log_a y = \log_a xy$. Merret

$$\log_a \mathrm{tg}1^\circ \cdot \mathrm{tg}2^\circ \cdot \ldots \cdot \mathrm{tg}89^\circ =$$

$$\log_a (\mathrm{tg}1^\circ \cdot \mathrm{tg}89^\circ)\cdot(\mathrm{tg}2^\circ \cdot \mathrm{tg}88^\circ)\cdot\ldots\cdot(\mathrm{tg}44^\circ \cdot \mathrm{tg}46^\circ)\cdot \mathrm{tg}45^\circ) = \log_a 1 = 0 .$$

Shënim. Shfrytëzuam faktin që nëse $\alpha+\beta=90^\circ$ atëherë $\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta=1$.

Vërtetë $\mathrm{tg}\alpha=\mathrm{tg}(90^\circ-\beta)=\mathrm{ctg}\beta$. Pra $\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta=\mathrm{ctg}\beta\cdot\mathrm{tg}\beta=1$.

Detyra 10. Nëse $a>0$ vërtetoni se vlen

$$S \equiv \log_2 a\cdot\log_4 a + \log_4 a\cdot\log_8 a + \ldots + \log_{2^{n-1}} a\cdot\log_{2^n} a = \frac{n-1}{n}\log_2^2 a .$$

Zgjidhja.
Dallojmë rastet: 1) $a\neq 1$, 2) $a=1$.

1) Për $a\neq 1$ merret

$$S \equiv \log_2 a\cdot\log_4 a + \log_4 a\cdot\log_8 a\cdot \ldots \cdot\log_{2^{n-1}} a\cdot\log_{2^n} a$$

$$=\frac{1}{\log_a 2\cdot\log_a 2^2}+\frac{1}{\log_a 2^2\cdot\log_a 2^3}+\ldots+\frac{1}{\log_a 2^{n-1}\cdot\log_a 2^n}$$

$$=\frac{1}{2\log_a^2 2}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot\log_a^2 2}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n\cdot\log_a^2 2}$$

$$=\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)n}\right)\cdot\log_2^2 a$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\cdot\log_2^2 a = \frac{n-1}{n}\log_2^2 a$$ gjë që duhej treguar.

2) Për $a=1$ qartë që $S=0$.

Detyrë plotësuese

3. A mund të përgjithsojmë? Nëse $a>0, k\in\mathbb{N}$, atëherë

$$S \equiv \log_k a\cdot\log_{k^2} a + \log_{k^2} a\cdot\log_{k^3} a + \ldots + \log_{k^{n-1}} a\cdot\log_{k^n} a = \frac{n-1}{n}\log_k^2 a .$$

Detyra 11. Vargu i numrave f_n të dhënë me:

$$f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_{n+1} = f_{n-1} + f_n,\ n \geq 1$$

quhet *varg u i Fibonaçit* (*Fibonacci*).

(Vërejmë se disa nga numrat e Fibonaçit janë:

$$0,1,1,2,3,5,8,13,21,...) .$$

Të vërtetohen barazitë:

a) $f_1 + f_2 + ... + f_n = f_{n+1} - 1$

b) $f_1 + f_3 + f_5 + ... + f_{2n-1} = f_{2n}$.

Zgjidhja.

a) Nga përkufizimi i vargut të numrave të Fibonaçit kemi:

$f_{n+1} = f_{n-1} + f_n$, kështu që $f_{n-1} = f_{n+1} - f_n$.

Pra

$$f_1 = f_3 - f_2$$
$$f_2 = f_4 - f_3$$
$$f_3 = f_5 - f_4$$
$$\cdots$$
$$f_n = f_{n+2} - f_{n+1} .$$

Duke i mbledhur anë për anë relacionet e mësipërme merret

$f_1 + f_2 + ... + f_n = f_{n+2} - f_2 = f_{n+2} - 1$, gjë që duhej vërtetuar.

b) Nga përkufizimi i mësipërmë vërejmë se $f_n = f_{n+1} - f_{n-1}$.

Pra

$$f_1 = f_2 - f_0$$
$$f_3 = f_4 - f_2$$
$$f_5 = f_6 - f_4$$
$$...$$
$$f_{2n-1} = f_{2n} - f_{2n-2} .$$

Duke mbledhur anë për anë relacionet e mësipërme merret

$f_1 + f_3 + ... + f_{2n-1} = f_{2n} - f_0 = f_{2n} - 0 = f_{2n}$, gjë që duhej treguar.

Detyrë plotësuese

3. Vërtetoni se vlen barazimi $f_2 + f_4 + f_6 + \ldots + f_{2k-2} = f_{2k-1} - 1$.

Detyra 12. Supozojmë se vlen pohimi:

Nëse $x^2 = x + 1,\ n \geq 2$ atëherë $x^n = f_n x + f_{n-1}$ *.

Vërtetoni se anëtari i n – të i vargut të numrave të Fibonaçit jepet me shprehjen

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Zgjidhja.

Lehtë tregohet se rrënjët e barazimit $x^2 - x - 1 = 0$ janë $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2},\ x_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Le të shënojmë $\tau = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ d.m.th. $1 - \tau = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Nga pohimi i mësipërm kemi

$$\tau^n = \tau \cdot f_n + f_{n-1} \qquad (1)$$

dhe

$$(1-\tau)^n = (1-\tau) f_n + f_{n-1} \qquad (2)$$

Duke zbritur (2) nga (1) merret

$$\tau^n - (1-\tau)^n = \tau \cdot f_n - (1-\tau) f_n$$

$$\tau^n - (1-\tau)^n = (2\tau - 1) f_n$$

$$\tau^n - (1-\tau)^n = \sqrt{5} f_n \Rightarrow f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right),$$

gjë që duhej treguar.

---

* Pohimi i mësipërm vlen dhe vërtetohet me anë të induksionit matematik.

Detyrë plotësuese

4. Vërtetoni ose mohoni identitetin

$$f_{3n} = f_n \left(\sqrt{5} \cdot f_{2n} + (-1)^n + 2\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Detyra 13. Njehsoni shumën $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^4 + k^2 + 1}$.

Zgjidhja.

Vërejmë se për $k \geq 1$, vlen:

$$k^4 + k^2 + 1 = (k^4 + 2k^2 + 1) - k^2 = (k^2 - 1)^2 - k^2 = (k^2 - k + 1)(k + k + 1).$$

Kështu shprehjen nën funksionin e shumës do të shënojmë në trajtën

$$\frac{k}{k^4 + k^2 + 1} = \frac{A}{(k^2 - k + 1)} + \frac{B}{k^2 + k + 1} \qquad (1)$$

Duke zgjidhur (1) si në detyrën 2, caktojmë koeficientët *A*, *B*.

Tregohet se $A = \dfrac{1}{2}, \; B = -\dfrac{1}{2}$.

Pra

$$\frac{k}{k^4 + k^2 + 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k^2 - k + 1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k^2 + k + 1}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{k^2 - k + 1} - \frac{1}{k^2 + k + 1} \right).$$

D.m.th.

$$\frac{2k}{k^4 + k^2 + 1} = \frac{1}{k^2 - k + 1} - \frac{1}{k^2 + k + 1}.$$

Le të shënojmë $f(k) = \dfrac{1}{k^2 + k + 1}$. Atëherë $f(k-1) = \dfrac{1}{k^2 - k + 1}$. Pse?

D.m.th.

$$\frac{2k}{k^4 + k^2 + 1} = f(k-1) - f(k).$$

Pra

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^4 + k^2 + 1} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} (f(k-1) - f(k))$$

$$=\frac{1}{2}(f(0)-f(1)+f(1)-f(2)+f(2)-f(3)+\ldots+f(n-1)-f(n))$$

$$=\frac{1}{2}(f(0)-f(n))=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n^2+n+1}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{n^2+n}{n^2+n+1}.$$

Detyra 14. Vërtetoni identitetin

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{m+k-1}{k}=\sum_{k=1}^{m}\binom{n+k-1}{k}.$$

Zgjidhja.

Përkujtojmë se $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$, ku $n!=n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1,\ n\in\mathbb{N}$.

Së pari vërtetojmë një pohim ndihmës.

***Pohim*:** Vlen identiteti

$$\binom{m}{k-1}+\binom{m}{k}=\binom{m+1}{k},\ k\in\mathbb{N}.$$

Vërtetim. Shprehjen në anën e majtë e transformojmë si vijon:

$$\binom{m}{k-1}+\binom{m}{k}=\frac{m!}{(k-1)!\cdot(m-(k-1))!}+\frac{m!}{k!(m-k)!}$$

$$=\frac{m!}{(k-1)!(m-k+1)\cdot(m-k)!}+\frac{m!}{k\cdot(k-1)!\cdot(m-k)!}$$

$$=\frac{m!}{(k-1)!(m-k)!}\cdot\left(\frac{1}{m-k+1}+\frac{1}{k}\right)$$

$$=\frac{m!}{(k-1)!(m-k)!}\cdot\frac{m+1}{k\cdot(m+1-k)}$$

$$=\frac{(m+1)\cdot m!}{k\cdot(k-1)!\cdot(m+1-k)(m-k)!}=\frac{(m+1)!}{k!\cdot(m+1-k)!}=\binom{m+1}{k},$$

gjë që duhej treguar.

Le t'i kthehemi tani detyrës. Transformojmë së pari shprehjen në anën e majtë.

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{m+k-1}{k}=\binom{m}{1}+\binom{m+1}{2}+\ldots+\binom{m+n-1}{n}$$

$$=\binom{m}{0}+\binom{m}{1}+\binom{m+1}{2}+\ldots+\binom{m+n-1}{n}-\binom{m}{0}.$$

Nga pohimi i mësipërm kemi $\binom{m}{0}+\binom{m}{1}=\binom{m+1}{1}$.

D.m.th.

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{m+k-1}{k}=\binom{m+1}{1}+\binom{m+1}{2}+\binom{m+2}{3}+\ldots+\binom{m+n-1}{n}-1,$$

sepse $\binom{m}{0}=1$.

Duke vazhduar këtë proces (pra duke zbatuar pohimin e vërtetuar më sipërmë) merret

$$\sum_{k=1}^{n}\binom{m+k-1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\binom{n+k-1}{k}-1. \qquad (1)$$

Ngjashëm tregohet se

$$\sum_{k=1}^{m}\binom{n+k-1}{k}=\binom{m+n}{n}-1 \qquad (2)$$

Qartë se nga (1) dhe (2) merret vërtetimi i pohimit.

Detyra 15. Le të jetë x – numër real dhe $n\in\mathbb{N}$ $n\in\mathbb{Z}$. Vërtetoni se vlen

$$[x+n]=[x]+n .$$

Zgjidhja.

Metoda e parë. Le të jetë

$$m=[x+n]. \qquad (1)$$

Sipas përkufizimit të funksionit *pjesa e plotë* e x – it kemi $m\le x+n<m+1$.

D.m.th. $m-n\le x<m-n+1$.

Pra

$$[x]=m-n\Rightarrow m=[x]+n \qquad (2)$$

Nga (1) dhe (2) rrjedh që $[x+n]=[x]+n$, gjë që duhej treguar.

Metoda e dytë.

$$x\ge[x]\Rightarrow x+n\ge[x]+n .$$

Tani $[x]+n$ është numër natyror më i vogël ose baraz me $x+n$, pra mund të jetë më i vogël ose i barabart me pjesën e plotë të $[x+n]$.

$$[x+n] \geq [x]+n\,.$$

Tani

$$x+n \geq [x+n]$$

$$x \geq [x+n]-n\,.$$

Pra $[x+n]-n$ është numër i plotë më i vogël ose baraz me *x*. D.m.th.

$$[x+n]-n \leq [x]$$

$$[x]+n \geq [x+n]\,.$$

Përfundimisht kemi:

$$\left.\begin{array}{l}[x+n] \geq [x]+n \\ [x]+n \geq [x+n]\end{array}\right\} \Rightarrow [x]+n = [x+n]\,.$$

Detyra plotësuese

5. Vërtetoni se për çdo $x \in \mathbb{R}$ të tillë që $1 < x < 10$, dhe për çdo $n \in \mathbb{N}$ vlen

$$\left[\frac{x^2+121n+\log x(2x+\log x)}{121}\right] = n\,.$$

6. Vërtetoni ose mohoni:

Për çdo $x \in (0,1),\ x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$ vlejnë relacionet:

a) $$\sum_{i=1}^{k}\left[\frac{x^n+2}{2}+n\right] = k(1+n)$$

b) $$\prod_{n=1}^{k}\left[\frac{x^n+2}{2}+n\right] = (1+n)^k\,.$$

DETYRA PËR USHTRIME

1. Vërtetoni formulat:

a) $\dfrac{|a+b|+|a-b|}{2}=\max(|a|,|b|)$;

b) $\dfrac{|a+b|-|a-b|}{2}=\operatorname{sgn}(ab)\min(|a|,|b|),\ a,b\in R$,

ku $\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$.

2. Vërtetoni formulat:

a) $\dfrac{|a+b|+|a-b|}{2ab}=\dfrac{\operatorname{sgn}(ab)}{\min(|a|,|b|)}$;

b) $\dfrac{|a+b|-|a-b|}{2ab}=\dfrac{1}{\max(|a|,|b|)},\ a,b\in R$ dhe $ab\neq 0$.

Të vërtetohet se për çdo $n\in\mathbb{N}$ vlejnë identitetet

3. $\dfrac{1}{2\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 6}+\dfrac{1}{6\cdot 8}+\ldots+\dfrac{1}{2n(2n+2)}=\dfrac{n}{2(n+2)}$.

4. $\dfrac{1}{1\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 5}+\dfrac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{n}{2n+1}$.

5. $\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{20}+\ldots+\dfrac{1}{n^2+3n+2}=\dfrac{n}{2n+4}$ **.**

6. $\dfrac{3}{1^2\cdot 2^2}+\dfrac{5}{2^2\cdot 3^2}+\dfrac{7}{3^2\cdot 4^2}+\ldots+\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}$.

7. $\dfrac{1}{1^2\cdot 2^2}+\dfrac{2}{3^2\cdot 5^2}+\dfrac{3}{5^2\cdot 7^2}+\ldots+\dfrac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}=\dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)^2}$.

8. Vërtetoni identitetin

$$\frac{((a^x-1)^3-a^x((a^x+1)(a^x-3)-a^x+6)^{2n}}{(a^x)^{n+1}b^x : a^x(b^x)^{n+1}}\cdot\left(\frac{a^x}{b^x}\right)^n=1.$$

9. Nëse $A_m=\dfrac{a^m+a^{-m}}{2};\ B_m=\dfrac{a^m-a^{-m}}{2}$,

Vërtetoni identitetet:

$$A_m^2-B_m^2=1,\ A_{-m}=A_m,\ B_{-m}=-B_m$$

$$A_{m+n}=A_m\cdot A_n+B_m\cdot B_n,\ B_{m+n}=A_m\cdot B_n+A_n\cdot B_m.$$

Të shprehen A_{m-n} dhe B_{m-n} me ndihmën e $A_m,\ A_n,\ B_m,\ B_n$.

10. Vërtetoni identitetin

$$\left(\sum_{k=0}^{n}a_k\cdot x^k\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{n}b_k\cdot x^k\right)=\sum_{\substack{i,k=0\\ i+k\le 2n}}^{n}a_i\cdot b_k\cdot x^{i+k}.$$

11. Nëse $a_1a_2=b_1b_2=c_1c_2$ vërtetoni identitetin

$$(a_1+b_2)(b_1+c_2)(c_1+a_2)=(a_2+b_1)(b_2+c_1)(c_2+a_1).$$

12. Vërtetoni identitetin

$$2\cdot 6\cdot 10\cdot\ldots\cdot(4n-6)(4n-2)=(n+1)(n+2)\cdot\ldots\cdot(2n-1)(2n).$$

13. Vërtetoni se $a^{\log b}=b^{\log a}\ \ (a,b>0)$.

14. Nëse $\log_b a=m$ dhe $\log_c b=m$ vërtetoni se $\log_{bc} ab=\dfrac{n(m+1)}{n+1}$.

15. Nëse $\log_{12}18=\alpha,\ \log_{24}54=\beta$ vërtetoni se $\alpha\beta+5(\alpha-\beta)=1$.

16. Nëse $2\log_m x=\log_k x+\log_n x,\ m,n,k,x\in R^+\setminus\{1\}$ vërtetoni se vlen

$$n^2=(kn)^{\log_k m}.$$

17. Nëse $N>0,\ a>0,\ b>0$ dhe $c>0,\ N\neq 1,\ a\neq 1,\ b\neq 1,\ c\neq 1,\ a\cdot b\cdot c\neq 1$ atëherë vlen

$$\log_a N\cdot\log_b N+\log_b N\cdot\log_c N+\log_c N\cdot\log_a N$$

$$=\frac{\log_a N\cdot\log_b N\cdot\log_c N}{\log_{abc} N}.$$ Vërtetoni.

18. Vërtetoni identitetin

$$\left(\sqrt[\log_2 N]{N}\cdot\sqrt[\log_4 N]{N}\cdot\sqrt[\log_8 N]{N}\cdot\ldots\cdot\sqrt[\log_{2^n} N]{N}\right)^{\frac{2}{n+1}}=2^n,\ \ n\in N\ .$$

19. Nëse a,b janë katetet kurse c hipotenuza e trekëndëshit kënddrejtë vërtetoni se vlen

$$\log_{b+c} a+\log_{c-b} a=2\log_{b+c} a\cdot\log_{c-b} a\ .$$

20. Vërtetoni identitetin

$$\log\left(1+\frac{1}{1}\right)+2\log\left(1+\frac{1}{2}\right)+3\log\left(1+\frac{1}{3}\right)+\ldots+n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$$
$$=(1+n)\log(1+n)-\log(1+n)!\,.$$

21. Vërtetoni identitetin

$$\frac{1}{\log_a n}+\frac{1}{\log_{a^2} n}+\frac{1}{\log_{a^3} n}+\frac{1}{\log_{a^4} n}+\frac{1}{\log_{a^5} n}=15\log_n a\ .$$

22. Vërtetoni identitetin

$$\frac{1}{(\log_{a_1} x)^{-1}+(\log_{a_2} x)^{-1}+\ldots+(\log_{a_n} x)^{-1}}=\log_{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n} x\ .$$

23. Vërtetoni identitetin

$$\log_a n\cdot\log_b n+\log_b n\cdot\log_c n+\log_c n\cdot\log_a n=\frac{\log_a n\cdot\log_b n\cdot\log_c n}{\log_{abc} n}\ .$$

24. Nëse $a^2+b^2=7ab$ vërtetoni se vlen $\log\frac{a+b}{3}=\frac{1}{2}(\log a+\log b)$.

25. Nëse $a^2+4b^2=12ab$ vërtetoni se vlen $\log\frac{a+2b}{4}=\frac{1}{2}(\log a+\log b)$.

26. Vërtetoni se $1997^{1997}-1995^{1995}+1994=1996k$, ku k është numër i plotë.

Le të jenë ku f_n janë numrat e *Fibonaçit*.

27. Vërtetoni se $f_1^2 + f_2^2 + ... + f_n^2 = f_n f_{n+1}$.

28. Vërtetoni identitetin (*Identiteti i Kasinit* (Cassini))

$$f_{n-1} f_{n+1} - f_n^2 = (-1)^n, \ n \geq 1.$$

29. Vërtetoni identitetin (*Cesaro*)

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^k f_k = f_{3n}.$$

30. Le të jetë $m, n \in \mathbb{Z}$. Vërtetoni se vlen relacioni

$$\left[\frac{m+n}{2}\right] + \left[\frac{n-m+1}{2}\right] = n.$$

31. Le të jetë $n \in \mathbb{N}$. Vërtetoni se vlen

$$\left[\frac{n+2-\left[\frac{n}{25}\right]}{3}\right] = \left[\frac{8n+24}{25}\right].$$

32. Vërtetoni formulën $\sum_{k=1}^{2n} \left[\frac{k}{2}\right] = n^2$, ku $[x]$ – është pjesa e plotë e x–it.

33. Të vërtetohet identiteti

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \cdot \binom{2n-1}{k}^{-1} = \frac{2}{n+1}.$$

34. Të vërtetohet identiteti

$$\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 3\binom{n}{3} + ... + n\binom{n}{n} = n \cdot 2^{n-1}.$$

35. Le të jenë $n_1, n_2, ..., n_k$ numra natyror dhe pjesëtues të numrit n të ndryshëm nga 1 dhe n. Vërtetoni se vlen

$$\frac{2}{\log_k n}(\log_k n_1 + \log_k n_2 + ... + \log_k n_k) = k.$$

MOSBARAZITË

Detyra 1. Të vërtetohet mosbarazia

$$\sqrt[2004]{4}+\sqrt[2004]{9}+\sqrt[2004]{16}>\sqrt[2004]{6}+\sqrt[2004]{8}+\sqrt[2004]{12}\,.$$

Zgjidhja.

Le të shënojmë $a=\sqrt[1996]{2};\ b=\sqrt[1996]{3};\ c=\sqrt[1996]{4}$.

Mosbarazia e dhënë është ekuivalente me mosbarazinë

$$a^2+b^2+c^2>ab+ac+bc\,. \tag{1}$$

Prandaj, mjafton të tregojmë saktësinë mosbarazisë (1)

$$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc>0$$

$$2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2ac-2bc>0$$

$$a^2-2ab+b^2+a^2-2ac+c^2+b^2-2bc+c^2>0$$

$$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2>0$$

që është e saktë sepse $a\neq b,\ a\neq c$ dhe $b\neq c$.

Detyra plotësuese

Vërtetoni ose mohoni:

1. Le të jenë a,b,c numra të plotë pozitiv të tillë që $a+b+c>a_1+b_1+c_1$.

   Të vërtetohet mosbarazia $\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}+\sqrt[n]{c}>\sqrt[n]{a_1}+\sqrt[n]{b_1}+\sqrt[n]{c_1}$.

   Po nëse a,b,c janë numra realë pozitiv?

2. Për çdo $n\in\mathbb{N},n>1$ vlen mosbarazia

$$\sqrt[n]{8}+\sqrt[n]{27}+\sqrt[n]{64}>\sqrt[n]{12}+\sqrt[n]{32}+\sqrt[n]{36}.$$

Detyra 2. Nëse x,y,z janë numra pozitiv të tillë që $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ të vërtetohet se vlen mosbarazia $(x-1)(y-1)(z-1)\geq 8$.

Zgjidhja.

Së pari vërejmë se $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1\Rightarrow xyz-xy-xz-yz=0$. (1)

Le të jetë $A=(x-1)(y-1)(z-1)$. Nga (1) kemi:

$$A=xyz-xy-xz-yz+x+y+z-1=x+y+z-1\,.$$

Në anën tjetër në bazë të detyrës 4 kemi

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} = 3.$$

D.m.th. $x+y+z \geq 9$. Atëherë $A = x+y+z-1 \geq 9-1 = 8$, gjë që duhej vërtetuar.

Detyra 3. Të vërtetohet se për numrat realë pozitiv $a_1, a_2, \dots, a_n$ vlen

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}.$$

Zgjidhja.

Le të shënojmë me $A_n = \dfrac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$ dhe $G_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$.

Vërtetimin do ta bëjmë me induksion matematikë.

Për $n=2$ mosbarazia (1) shndërrohet në formën $\dfrac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$, pra $(\sqrt{a_1}-\sqrt{a_2})^2 \geq 0$. Ky mosbarazim është i saktë. Shenja e barazimit vlen atëherë dhe vetëm atëherë kur $a_1 = a_2$.

Supozojmë se mosbarazia vlen për ndonjë *k*, pra se $A_k \geq G_k$ dhe tregojmë se ajo vlen edhe për $n = k+1$, pra se $A_{k+1} \geq G_{k+1}$.

Shqyrtojmë vargun e numrave pozitivë me $a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}$ dhe supozojmë se a_{k+1} është numri më i madh, pra se $a_{k+1} \geq a_1$, $a_{k+1} \geq a_2$, ..., $a_{k+1} \geq a_k$. Prej këtu rrjedh që $a_{k+1} \geq \dfrac{a_1+a_2+\dots+a_k}{k}$.

$$\text{Meqë} \quad \begin{cases} A_k = \dfrac{a_1+a_2+\dots+a_k}{k}, \\[2ex] A_{k+1} = \dfrac{a_1+a_2+\dots+a_{k+1}}{k+1}, \end{cases} \tag{2}$$

nga (2) merret që

$$A_{k+1} = \frac{kA_k + a_{k+1}}{k+1} \tag{3}$$

Meqë $a_{k+1} \geq A_k$, atëherë $a_{k+1} = A_k + A$, për ndonjë $A \geq 0$. Duke marrë parasysh këtë të fundit si dhe (3) merret

$$A_{k+1} = \frac{kA_k + A_k + A}{k+1} = A_k + \frac{A}{k+1} \tag{4}$$

Nëse shprehjen (4) e ngrisim në fuqinë e $(k+1)$ marrim

$$(A_{k+1})^{k+1} = \left(A_k + \frac{A}{k+1}\right)^{k+1} = (A_k)^{k+1} + \binom{k+1}{1}(A_k)^k \frac{A}{k+1} + ... \geq$$

$$\geq (A_k)^{k+1} + (A_k)^k A = (A_k)^k (A_k + A) = (A_k)^k \cdot a_{k+1}. \qquad (5)$$

Sipas supozimit $(A_k)^k \geq a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot ... \cdot a_k$ dhe duke marrë parasysh (5) kemi $(A_{k+1})^{k+1} \geq (A_k)^k \cdot a_{k+1} \geq a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_k \cdot a_{k+1}$, prej nga rrjedh që $A_{k+1} \geq \sqrt[k+1]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_k \cdot a_{k+1}}$, respektivisht $A_{k+1} \geq G_{k+1}$ gjë që duhej treguar.

Shenja e barazimit në relacionin (1) vlen atëherë dhe vetëm atëherë nëse $a_1 = a_2 = ... = a_k$.

Shënim 1. Relacioni $A_n = \dfrac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n}$ quhet *e mesmja aritmetike* e numrave realë pozitiv $a_1, a_2, ..., a_n$, kurse $G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n}$ quhet *e mesmja gjeometrike* e numrave realë pozitiv $a_1, a_2, ..., a_n$, kurse mosbarazia e vërtetuar në detyrën 3 quhet *mosbarazia mes të mesmes aritmetike dhe gjeometrike.*

Shënim 2. Parimi i induksionit matematik më në detale mësohet ....

Detyra 4. Të vërtetohet se për numrat realë pozitiv $a_1, a_2, ..., a_n$ vlen

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}.$$

Zgjidhja.

Duke shfrytëzuar *mosbarazinë mes të mesmes aritmetike dhe gjeometrike* për numrat $a_1, a_2, ..., a_n$ dhe $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, ..., \frac{1}{a_n}$ merret

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n} \qquad (1)$$

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot ... \cdot \frac{1}{a_n}}. \qquad (2)$$

Duke shumëzuar mosbarazitë (1) dhe (2) merret

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \cdot \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + ... + \frac{1}{a_n}}{n} \geq 1 \text{ përkatësisht}$$

$$\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \geq \frac{1}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}} \qquad (3)$$

gjë që duhej vërtetuar.

Shënimi 3. Relacioni $H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_n}}$ quhet e *mesmja harmonike* e numrave realë pozitiv $a_1, a_2, ..., a_n$.

Shënimi 4. Relacioni $K_n = \left(\frac{a_1^2+...+a_n^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}}$ quhet e *mesmja e katrorëve* të numrave realë pozitiv $a_1, a_2, ..., a_n$.

Shënimi 5. Të vërtetohet mosbarazia $H_n \leq G_n$.

Shënimi 6. Të vërtetohet mosbarazia $A_n \leq K_n$.

Detyra 5. Nëse $a_1, a_2, ..., a_n$ dhe $b_1, b_2, ..., b_n$ janë numra realë pozitiv, të vërtetohet se vlen mosbarazia

$$\sqrt[n]{(a_1+b_1)\cdot(a_2+b_2)\cdot ... \cdot(a_n+b_n)} \geq \sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot ... \cdot a_n} + \sqrt[n]{b_1\cdot b_2\cdot ... \cdot b_n}.$$

Zgjidhja.

Pas pjesëtimit me $\sqrt[n]{(a_1+b_1)\cdot(a_2+b_2)\cdot ... \cdot(a_n+b_n)}$ të të dy anëve të mosbarazisë së dhënë ajo shkruhet në trajtën

$$1 \geq \sqrt[n]{\frac{a_1\cdot a_2\cdot ... \cdot a_n}{(a_1+b_1)\cdot(a_2+b_2)\cdot ... \cdot(a_n+b_n)}} + \sqrt[n]{\frac{b_1\cdot b_2\cdot ... \cdot b_n}{(a_1+b_1)\cdot(a_2+b_2)\cdot ... \cdot(a_n+b_n)}}$$

apo $1 \geq \sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot ... \cdot x_n} + \sqrt[n]{y_1\cdot y_2\cdot ... \cdot y_n}$ (1)

ku $x_i = \frac{a_i}{a_i+b_i}$, $y_i = \frac{b_i}{a_i+b_i}$ $(i = 1,2,...,n)$.

Pra, mjafton të vërtetojmë mosbarazinë e dhënë me (1).

Nga detyra 3 kemi:

$$\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot ... \cdot x_n} \leq \frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$$

$$\sqrt[n]{y_1\cdot y_2\cdot ... \cdot y_n} \leq \frac{y_1+y_2+...+y_n}{n}.$$

Mbledhim dy mosbarazitë e fundit dhe marrim

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} + \sqrt[n]{y_1 \cdot y_2 \cdot \ldots \cdot y_n} \le \frac{(x_1 + y_1)}{n} + \ldots + \frac{(x_n + y_n)}{n} = 1,$$

gjë që duhej treguar sepse $x_i + y_i = \dfrac{a_i}{a_i + b_i} + \dfrac{b_i}{a_i + b_i} = 1$.

Detyra 6. Nëse $0 < x_i < 1,\ i = 1,2,\ldots,2n$ të vërtetohet mosbarazia

$$n\sqrt{2} \le \sqrt{x_1^2 + (1 - x_2)^2} + \sqrt{x_2^2 + (1 - x_3)^2} + \ldots + \sqrt{x_{2n}^2 + (1 - x_1)^2}\ .$$

Zgjidhja.

Nga shënimi 6 i dhënë në detyrën 4 merret

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x_1 + 1 - x_2}{\sqrt{2}} \le \sqrt{x_1^2 + (1 - x_2)^2} \\ \dfrac{x_2 + 1 - x_3}{\sqrt{2}} \le \sqrt{x_2^2 + (1 - x_3)^2} \\ \qquad . \quad . \quad . \\ \dfrac{x_{2n} + 1 - x_1}{\sqrt{2}} \le \sqrt{x_{2n}^2 + (1 - x_1)^2} \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Pasi të mblidhen anë për anë mosbarazitë (1) merret

$$n\sqrt{2} \le \sqrt{x_1^2 + (1 - x_2)^2} + \sqrt{x_2^2 + (1 - x_3)^2} + \ldots + \sqrt{x_{2n}^2 + (1 - x_1)^2},$$

gjë që duhej treguar.

Detyra 7. Të caktohet vlera më e vogël e prodhimit

$$\left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{a_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)$$

ku $a_i > 0,\ i = 1,2,\ldots,n$ dhe $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = n$.

Zgjidhja.

Nga shënimi 5 i detyrës 4 kemi:

$$\sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{a_1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{a_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)} \ge \frac{n}{\dfrac{1}{1 + \frac{1}{a_1}} + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{a_2}} + \ldots + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{a_n}}}$$

$$=\frac{n}{\frac{a_1}{a_1+1}+\frac{a_2}{a_2+1}+\ldots+\frac{a_n}{a_n+1}}=\frac{n}{n-\left(\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\ldots+\frac{1}{a_n+1}\right)}.$$

Shfrytëzojmë detyrën 4

$$\frac{\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\ldots+\frac{1}{a_n+1}}{n}\geq\frac{n}{(a_1+1)+(a_2+1)+\ldots+(a_n+1)}$$

që është ekuivalente me

$$\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\ldots+\frac{1}{a_n+1}\geq\frac{n^2}{n+a_1+\ldots+a_n}=\frac{n^2}{n+n}=\frac{n}{2}.$$

Pra $\dfrac{n}{n-\left(\frac{1}{a_1+1}+\frac{1}{a_2+1}+\ldots+\frac{1}{a_n+1}\right)}\geq\dfrac{n}{n-\frac{n}{2}}=2$.

D.m.th. $\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{a_n}\right)}\geq 2$ ose

$$\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{a_n}\right)\geq 2^n.$$

Pra prodhimi i dhënë ka vlerën minimale 2^n dhe kjo arrihet kur $a_1=a_2=\ldots=a_n=1$.

Detyra plotësuese

3. Nëse $a_1,a_2,\ldots,a_n$ janë numra pozitiv të vërtetohet mosbarazimi

$$\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\leq e^{\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}-1}.$$

4. Të vërtetohet se $\ln 2\cdot\ln 3\cdot\ldots\cdot\ln(n+1)\leq\dfrac{(n+1)!}{e^n}, n\in N.$

Detyra 8. Nëse $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2=1$ të vërtetohet se vlen

$$-1\leq a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\leq 1.$$

Zgjidhja.

Nga $-1\leq a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n\leq 1$ merret $-2\leq 2a_1b_1+2a_2b_2+\ldots+2a_nb_n\leq 2.$

Meqë $a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=b_1^2+b_2^2+\ldots+b_n^2=1$ kemi

$$-(a_1^2+b_1^2+a_2^2+b_2^2+\ldots+a_n^2+b_n^2)\le 2a_1b_1+\ldots+2a_nb_n$$
$$\le (a_1^2+b_1^2+\ldots+a_n^2+b_n^2)$$
$$(a_1+b_1)^2+(a_2+b_2)^2+\ldots+(a_n+b_n)^2\ge 0;$$

dhe $(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2+\ldots+(a_n-b_n)^2\ge 0$.

Pra, pohimi është i vërtetë.

Detyra 9. Të vërtetohet mosbarazia

$$(a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)\ge 8abc \quad (a\ge 0,\ b\ge 0,\ c\ge 0).$$

Zgjidhja.

Metoda 1. Shfrytëzojmë det………

$$\left.\begin{aligned} a+b&\ge 2\sqrt{ab}\\ b+c&\ge 2\sqrt{bc}\\ c+a&\ge 2\sqrt{ca}\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Duke shumëzuar mosbarazitë e dhëna në (1) kemi:

$$(a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)\ge 8\sqrt{ab}\cdot\sqrt{bc}\cdot\sqrt{ca}=8abc$$

Metoda 2. Shqyrtojmë ndryshimin

$$(a+b)\cdot(b+c)\cdot(c+a)-8abc$$
$$=(a(b+c)+b(b+c))(c+a)-8abc$$
$$=a(b+c)(c+a)+b(b+c)(c+a)-8abc$$
$$=abc+a^2b+a^2c+ac^2+b^2c+ab^2+bc^2+abc-8abc$$
$$=a(b^2-2bc+c^2)+b(c^2-2ac+a^2)+c(a^2-2ab+b^2)$$

$=a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2\ge 0$, gjë që duhej treguar.

Shenja e barazimit vlen për $a=b=c$.

Detyra 10. Nëse $a\ge 0,\ b\ge 0,\ c\ge 0,\ d\ge 0$ të vërtetohet mosbarazia

$$\frac{a+b+c+d}{4}\ge\sqrt[4]{abcd}\ .$$

Zgjidhja.

Thyesën në anën e majtë e shënojmë si vijon $\dfrac{a+b+c+d}{4}=\dfrac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2}$.

Në bazë të detyrës 3 kemi:

$$\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} \geq \sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}} \,. \tag{1}$$

Po ashtu në bazë të detyrës 3 vlen:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \ \text{ dhe } \ \frac{c+d}{2} \geq \sqrt{cd}$$

Kur këto i zëvendësojmë në (1) merret

$$\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2} \geq \sqrt{\frac{a+b}{2}\cdot\frac{c+d}{2}} \geq \sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}} = \sqrt[4]{abcd} \,,$$

gjë që duhej vërtetuar.

Detyra 11. Të vërtetohet mosbarazia $|a_1+a_2| \leq |a_1|+|a_2|$.

Zgjidhja.

Lehtë tregohet se për çdo $a \in R$ vlejnë mosbarazitë

$$-|a| \leq a \leq |a|$$

Pra

$$\left.\begin{array}{l} -|a_1| \leq a_1 \leq |a_1| \\ -|a_2| \leq a_2 \leq |a_2| \end{array}\right\} \tag{1}$$

Duke mbledhur anë për anë mosbarazitë e dhëna në (1) merret

$$-(|a_1|+|a_2| \leq a_1+a_2 \leq |a_1|+|a_2|.$$

D.m.th. $\quad |a_1+a_2| \leq |a_1|+|a_2|$.

Detyra 12. Vërtetoni se vlen $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}} < 2\sqrt[3]{3}$.

Zgjidhja.

Le të jetë $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}=a,\ \sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}=b$. Lehtë tregohet se $a^3+b^3=6$.

Vlerësojmë shprehjen $(a+b)^3$.

$$(a+b)^3 = a^3+b^3+3ab(a+b) = 6+3ab(a+b) < 24$$

$$\Rightarrow a+b = \sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}} < 2\sqrt[3]{3} \ \text{ gjë që duhej treguar.}$$

Shënim. Gjatë vërtetimit shfrytëzuam faktin që $ab(a+b) < a^3+b^3$. Vërtetoni

Detyra 13. Të krahasohen numrat $\sqrt[2003]{2003!}$ dhe $\sqrt[2004]{2004!}$

Zgjidhja.

Tregojmë së pari se $\sqrt[n]{n!} < \sqrt[n+1]{(n+1)!}$.

Vërtetë kur mosbarazinë e fundit e fuqizojmë në fuqinë $n+1$ merret $n!^{\frac{n+1}{n}} < (n+1)!$ dhe pas transformimeve merret si vijon

$$n!^{1+\frac{1}{n}} < (n+1)\cdot n!$$

$$n!n!^{\frac{1}{n}} < (n+1)n!$$

$n! < (n+1)^n$, që tregohet lehtë se vlen për çdo $n \in N$. Tregoni.

Për $n = 2003$ merret që $\sqrt[2003]{2003!} < \sqrt[2004]{2004!}$.

Detyra 14. Të vërtetohet mosbarazia

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{n^2} > 1 \quad (n \in N \setminus \{1\}) .$$

Zgjidhja.
Për $n > 1$ vlen:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{n+1} > \dfrac{1}{n^2} \\ \dfrac{1}{n+2} > \dfrac{1}{n^2} \\ \quad\cdots \\ \dfrac{1}{n^2-1} > \dfrac{1}{n^2} \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Duke mbledhur mosbarazitë (1) merret

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+...+\frac{1}{n^2} > \frac{1}{n}+\frac{n^2-1}{n^2} = 1,$$ që duhej treguar.

Detyra 15. Le të jetë $n \in N \setminus \{1\}$. Të vërtetohet mosbarazia

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+...+\frac{1}{n^2} < 1 .$$

Zgjidhja

Anëtarët e shumës në anën e majtë i shënojmë si vijon:

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{2\cdot 2}<\frac{1}{1\cdot 2}$$

$$\frac{1}{9}=\frac{1}{3\cdot 3}<\frac{1}{2\cdot 3}$$

$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$

$$\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n\cdot n}<\frac{1}{(n-1)\cdot n}.$$

Duke mbledhur anë për anë merret

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}$$

$<\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=1-\frac{1}{n}<1$, gjë që duhej vërtetuar.

*Shënim***.** Gjatë vërtetimit shfrytëzuam detyrën 14 të kapitullit të parë.

Detyra 16. Të vërtetohet mosbarazia $1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!<(n+1)!$.

Zgjidhja.

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\ldots+n\cdot n!$$

$$=(2-1)\cdot 1!+(3-1)\cdot 2!+(4-1)\cdot 3!+\ldots+(n+1-1)\cdot n!$$

$$=2\cdot 1!-1!+3\cdot 2!-2!+4\cdot 3!-3!+\ldots+(n+1)\cdot n!-n!=(n+1)!-1<(n+1)!.$$

Detyra plotësuese

5. $n^n+(n+1)^{n+1}+\ldots+(n+k)^{n+k}<(n+k)^{n+k+1}<(n+k+1)^{n+k+1},\ n,k\in N.$
6. $(n!)^{n!}+(n+1)!^{(n+1)!}+\ldots+(n+k)!^{(n+k)!}<(n+k+1)!^{(n+k+1)!},\ n,k\in N.$
7. $\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{k}<\binom{n}{k+1},\ \forall n>k+1,\ n,k\in N.$
8. $\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{k}\le k\cdot n^k,\ n,k\in N.$

Detyra 17. Të vërtetohet se për $a,b\in(0,1)$ vlen mosbarazia

$$\log_a\frac{2ab}{a+b}\cdot\log_b\frac{2ab}{a+b}\ge 1.$$

Zgjidhja

Së pari vërejmë se kur $a,b\in(0,1)$ edhe $a\cdot b\in(0,1)$.

Nga $(a-b)^2 \geq 0 \Rightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Rightarrow \left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2 \leq ab$. Tregoni.

Meqë $0 < ab < 1 \Rightarrow \frac{2ab}{a+b} < 1$

Në bazë të vetive të funksionit logaritmik me bazë më të vogël se 1 merret.

$$\log_{\frac{2ab}{a+b}} ab \leq \log_{\frac{2ab}{a+b}} \left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2 = 2.$$

Nga relacioni i fundit kemi $1 \geq \frac{1}{2}\log_{\frac{2ab}{a+b}} ab$. Duke ngritur në katror dhe duke transformuar kemi:

$$1 \geq \left(\frac{1}{2}\log_{\frac{2ab}{a+b}} a + \frac{1}{2}\log_{\frac{2ab}{a+b}} b\right)^2 \geq \log_{\frac{2ab}{a+b}} a \cdot \log_{\frac{2ab}{a+b}} b.$$ Pse?

Prandaj, meqë $\log_x a = \frac{1}{\log_a x}$ kemi

$$1 \geq \frac{1}{\log_a \frac{2ab}{a+b} \cdot \log_b \frac{2ab}{a+b}} \Rightarrow \log_a \frac{2ab}{a+b} \cdot \log_b \frac{2ab}{a+b} \geq 1$$

gjë që duhej vërtetuar.

Detyra 18. Të tregohet se për çdo numër pozitiv a vlen mosbarazia

$$\log_3^2 a + 2\log_3 a \cdot \log_3 \frac{3}{a} \leq 1,$$

Udhëzim: Shfrytëzohet fakti që $\log_3 \frac{3}{a} = \log_3 3 - \log_3 a = 1 - \log_3 a$.

Detyra 19. Të vërtetohet mosbarazia

$$\log_{b+c} a^2 + \log_{c+a} b^2 + \log_{a+b} c^2 \geq 3$$

ku a, b, c janë numra realë jo më të vegjël se 2.

Zgjidhja.

Vërejmë se vlejnë implikacionet

$$a \geq 2 \Rightarrow a^2 \geq 4 \Rightarrow \log_4 a^2 \geq \log_4 4 = 1$$

$$b \geq 2 \Rightarrow b^2 \geq 4 \Rightarrow \log_4 b^2 \geq \log_4 4 = 1$$

$$c \ge 2 \Rightarrow c^2 \ge 4 \Rightarrow \log_4 c^2 \ge \log_4 4 = 1$$

Po ashtu vlejnë implikacionet

$$\left.\begin{aligned} b+c \ge 4 \Rightarrow \log_{b+c} a^2 \ge \log_4 a^2 \ge 1 \\ a+c \ge 4 \Rightarrow \log_{a+c} b^2 \ge \log_4 b^2 \ge 1 \\ a+b \ge 4 \Rightarrow \log_{a+b} c^2 \ge \log_4 c^2 \ge 1 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Duke i mbledhur mosbarazitë e mësipërme merret

$\log_{b+c} a^2 + \log_{c+a} b^2 + \log_{a+b} c^2 \ge 3$ gjë që duhej treguar.

Detyra 20. Le të jetë $a > 2$. Të vërtetohet se vlen

$$2\sqrt{2} \le \log_a (a+1) + \log_{a+1} a^2 < 3 .$$

Zgjidhja.

Tregojmë së pari pjesën e parë

$$2\sqrt{2} \le \log_a (a+1) + \log_{a+1} a^2$$

$$2\sqrt{2} \le \log_a (a+1) + 2\log_{a+1} a$$

$$2 \le \frac{\log_a (a+1)}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\log_a (a+1)}$$

Numrat $\frac{\log_a (a+1)}{\sqrt{2}}$ dhe $\frac{\sqrt{2}}{\log_a (a+1)}$ janë pozitiv. Në bazë të detyrës 3 kemi:

$$\frac{\dfrac{\log_a (a+1)}{\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{2}}{\log_a (a+1)}}{2} \ge \sqrt{\frac{\log_a (a+1)}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\log_a (a+1)}} = 1$$

Pra, vlen $2 \le \frac{\log_a (a+1)}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\log_a (a+1)}$.

Pjesa tjetër i mbetet lexuesit.

Detyrë plotësuese

9. Të vërtetohet mosbarazia

$$(\log_{\sqrt{2}} 3)^{-1} + (\log_e 5)^{-1} + (\log_\pi 7)^{-1} < e .$$

DETYRA PËR USHTRIME

Të vërtetohen mosbarazitë:

1. $\frac{a+b}{2}\cdot\frac{a^3+b^3}{2}\le\frac{a^4+b^4}{2}$. **2.** $x^{12}-x^9+x^4-x+1>0$.

3. $(a^n+b^n+c^n)(a+b+c)\le 3(a^{n+1}+b^{n+1}+c^{n+1}),\ a,b,c\ge 0,\ n\in N$.

4. Le të jenë a,b,c numra real për të cilët vlen $0<a<1, 0<b<1$ dhe $0<c<1$. Të vërtetohet se të tri prodhimet $(1-a)\cdot b, (1-b)\cdot c, (1-c)\cdot a$ nuk mund të jenë njëkohësisht më të mëdha se $\frac{1}{4}$.

5. Shuma e n numrave pozitiv $x_1, x_2, \dots, x_n$ është baraz me 1. Shënojmë me S numrin më të madh nga vargu

$$\frac{x_1}{1+x_1}, \frac{x_2}{1+x_1+x_2}, \dots, \frac{x_n}{1+x_1+x_2+\dots+x_n}.$$

Të caktohet vlera më e vogël e mundshme e S-it dhe ato vlera $x_1, x_2, \dots, x_n$ për të cilat arrihet vlera minimale S.

6. Nëse $x>y\ge 0$ atëherë $x+\frac{4}{(x-y)(y+1)^2}\ge 3$. Vërtetoni.

Të vërtetohen mosbarazitë:

7. $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}\ge\frac{3}{2}$.

8. $(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc,\ a,b,c\in R$.

9. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\ge 9abc$. **10.** $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)>9$.

11. Nëse $2x+4y=1$ të vërtetohet se $x^2+y^2\ge\frac{1}{20}$.

12. Nëse $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b}$ dhe $ac>0$ të vërtetohet se $\frac{a+b}{2a-b}+\frac{c+b}{2c-b}\ge 4$.

13. Nëse $a+b\geq 1$ të vërtetohet mosbarazia $a^4+b^4\geq \frac{1}{8}$.

14. Të vërtetohet se vlen implikacioni

$$a_1+a_2+...+a_n=1\Rightarrow a_1^2+a_2^2+...+a_n^2\geq \frac{1}{n}.$$

15. Nëse $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ të vërtetohet se vlen $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\geq \frac{1}{2}$.

16. Nëse a,b janë numra pozitiv dhe $a+b=1$, të vërtetohet se vlen

$$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2+\left(b+\frac{1}{b}\right)^2\geq \frac{25}{2}.$$

17. Të vërtetohet mosbarazia

$$\sqrt{a}+\sqrt{b}\leq \sqrt{\frac{a^2}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a}},\ a>0,\ b>0.$$

18. Nëse $a_1,a_2,...,a_n$ janë numra pozitiv dhe $S_n=a_1+a_2+...+a_n$, të vërtetohet mosbarazia

$$\left(a_1+\frac{1}{a_1}\right)^2+\left(a_2+\frac{1}{a_2}\right)^2+...+\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)^2\geq n\cdot\left(\frac{S_n}{n}+\frac{n}{S_n}\right)^2.$$

19. Nëse $x,y\in R,\ xy=1,\ x>y$ të vërtetohet se vlen $x^2+y^2\geq 2\sqrt{2}(x-y)$.

20. Të vërtetohet mosbarazia

$$\frac{x}{7+y^3+z^3}+\frac{y}{7+z^3+x^3}+\frac{z}{7+x^3+y^3}\leq \frac{1}{3},\ 0\leq x,y,z\leq 1.$$

21. Nëse a_1,a_2,a_3 janë numra realë pozitiv që plotësojnë kushtin $a_1+a_2+a_3=1$, të vërtetohet se vlen mosbarazia

$$\frac{a_1^2}{a_1+a_2}+\frac{a_2^2}{a_2+a_3}+\frac{a_3^2}{a_1+a_3}\geq \frac{1}{2}.$$

22. Le të jenë a,b,c numra real. Të vërtetohet se së paku njëri nga numrat $|a-b|^2,\ |b-c|^2,\ |c-a|^2$ nuk është më i madh se $\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$.

23. Nëse $a\geq 0,\ b\geq 0,\ c\geq 0,\ d\geq 0$ të vërtetohet mosbarazia

$$\sqrt{(a+c)(b+d)}\geq \sqrt{ab}+\sqrt{cd}.$$

24. Nëse $a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0$ atëherë vlen

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}\ .\ \text{Vërtetoni.}$$

25. Nëse $a \geq 0,\ b \geq 0,\ c \geq 0$ atëherë vlen

$$a+b+c \geq \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}\ .\ \text{Vërtetoni.}$$

26. Nëse $a+b+c=6\ (a,b,c \in R)$ atëherë vlen $a^2+b^2+c^2 \geq 12$. Vërtetoni.

27. Nëse a,b,c janë gjatësitë e brinjëve të trekëndëshit atëherë vlen mosbarazia $abc \geq (a+b-c)\cdot(b+c-a)\cdot(a+c-b)$. Vërtetoni.

28. Nëse $a+b+c=1,\ a \geq -\frac{1}{4},\ b \geq -\frac{1}{4},\ c \geq -\frac{1}{4}$ të vërtetohet mosbarazia

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1} \leq 5\ .$$

Të vërtetohen mosbarazitë:

29. $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a} \geq 3,\ a>0,\ b>0,\ c>0$.

30. $||a|-|b|| \leq |a+b|$.

31. $|a|-|b| \leq |a-b|$.

32. $||a|-|b|| \leq |a-b|$.

33. Të vërtetohet se për çdo numër real $x \geq \frac{1}{2}$ ekziston numri i plotë n ashtu që $|x-n^2| \leq \sqrt{x-\frac{1}{4}}$.

34. Janë dhënë numrat e plotë pozitiv m,n të tillë që $\frac{m}{n} < \sqrt{2}$. Të vërtetohet se $\sqrt{2}-\frac{m}{n} > \frac{1}{2n^2\sqrt{2}}$.

Të vërtetohen mosbarazitë:

35. $\sqrt{1+\sqrt{2+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{n}}}} < 2,\ n \in N$.

36. $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{9999}{10000} < 0.01$.

37. $\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 < \frac{1}{2n}, n \in N..$

38. Nëse $b_1, b_2, \dots, b_n$ është permutacion i çfarëdoshëm i numrave pozitiv $a_1, a_2, \dots, a_n$, të vërtetohet se vlen mosbarazia $\frac{a_1}{b_1}+\frac{a_2}{b_2}+\dots+\frac{a_n}{b_n} \geq n$.

Të vërtetohen mosbarazitë:

39. $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n} \quad (n \geq 2)$.

40. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}+n > n\sqrt[n]{n+1}, n \in N.$.

41. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}+n > n\sqrt[n]{n+1},\ n \in N$.

42. Të vërtetohet se $\left(\frac{n+1}{2}\right)^n > n!$, ku $n \in N,\ n > 1$.

43. Nëse $n \in N \setminus \{1\}$ atëherë vlen

$$\sqrt{1}+\sqrt{2}+\dots+\sqrt{n} > n.$$

Të vërtetohen mosbarazitë:

44. $\sqrt{n} < 1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}},\ n \geq 2.$

45. $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{2n} > \frac{1}{2}$.

46. $(1984!)^{1985} < (1985!)^{1984}$.

47. Nëse $a > 1,\ b > 1,\ c > 1$ të vërtetohet mosbarazia

$$\log_{abc}^3 a \cdot \log_b a \cdot \log_a c \leq \frac{1}{27}.$$

Të vërtetohen mosbarazitë:

48. $\frac{1}{m}\cdot\log(1+a^m) < \frac{1}{n}\cdot\log(1+a^n),\ m > n > 0,\ a > 0$.

49. $\log_a ab\left(1+\frac{1}{\log_a b}\right) \geq 4,\ a > 0,\ b \neq 1$.

50. $\min\left(\frac{p-m}{p+m}, \frac{p+m}{p-m}\right) \leq \frac{x^2-2mx+p^2}{x^2+2mx+p^2} \leq \max\left(\frac{p-m}{p+m}, \frac{p+m}{p-m}\right)$,

$(0 < |m| < |p|)$.

51. Le të jetë $n > 2, n \in N$. Le të jenë a, b katetet kurse c hipotenuza e trekëndëshit kënddrejtë. Të vërtetohet se $a^n + b^n < c^n$.

52. Të vërtetohet se për çdo numër natyror $n \geq 2$ vlen:

a) $\sqrt{9n+8} < \sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} < \sqrt{9n+9}$

b) Të vërtetohet se për çdo numër natyror n vlen barazia

$[\sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}] = [\sqrt{9n+8}]$, ku $[x]$ - pjesa e plotë e x-it.

53. Të vërtetohet mosbarazia $\prod_{i=1}^{n}(a_i^2 + 7a_i + 49) > 21^n \cdot \prod_{i=1}^{n} a_i$.

7. SISTEMET E BARAZIMEVE DHE MOSBARAZIMEVE

Detyra 1. Është dhënë sistemi i barazimeve lineare sipas x, y (m, n parametra real)

$$\begin{cases} \dfrac{x}{m+n} + \dfrac{y}{m-n} = 2m \\ \dfrac{x-y}{mn} = 4 \end{cases}.$$

Vërtetoni se nëse $mn \neq 0,\ m \neq \pm n$ atëherë zgjidhjet e sistemit janë pozitive.

Zgjidhja.

Nga barazimi i dytë i sistemit kemi $x = 4mn + y$.

Zëvendësojmë në barazimin e parë dhe marrim

$$\frac{4mn + y}{m+n} + \frac{y}{m-n} = 2m .$$

Pas transformimeve merret $y = (m-n)^2$.

Atëherë $x = 4mn + y \Rightarrow x = (m+n)^2$.

Pra $((m+n)^2,\ (m-n)^2)$ është zgjidhja e sistemit.

Detyra 2. Të zgjidhet sistemi i barazimeve

$$\begin{cases} xy + xz = -4 \\ yz + yx = -1. \\ xz + yz = -9 \end{cases}$$

Zgjidhja.

Duke mbledhur që të tri barazimet marrim

$$xy + xz + yz = -7 \qquad (1)$$

Nga barazimi i parë i sistemit dhe (1) marrim

$$yz = -3 \qquad (2)$$

Ngjashëm nga barazimi i dytë i sistemit dhe (1) marrim

$$xz = -6 \qquad (3)$$

Nga barazimi i tretë i sistemit dhe (1) marrim

$$xy = 2 \qquad (4)$$

Duke shumëzuar barazimet (2), (3), (4) anë për anë marrim

$$(xyz)^2 = 36 \qquad (5)$$

Nga (2), (3), (4), (5) marrim sistemet:

$$\text{I)} \begin{cases} xyz = 6 \\ yz = -3 \\ xz = -6 \\ xy = 2 \end{cases} \qquad \text{II)} \begin{cases} xyz = -6 \\ yz = -3 \\ xz = -6 \\ xy = 2 \end{cases}$$

Pas zgjidhjes së sistemit (1) merret $x = -2,\ y = -1,\ z = 3$, kurse me zgjidhjen e sistemit (2) merret $x = 2,\ y = 1,\ z = -3$.

Përfundojmë se $(-2,-1,3),\ (2,1,-3)$ janë zgjidhjet e sistemit.

Detyrë plotësuese

1. Të zgjidhet sistemi i barazimeve:

$$\begin{cases} xy + xz + xt = a \\ yz + yt + yx = b. \\ zt + zx + zy = c \end{cases}$$

Detyra 3. Të zgjidhet sistemi

$$\begin{cases} x^2 = 13x + 4y \\ y^2 = 4x + 13y \end{cases}.$$

Zgjidhja.

Barazimit të parë ia zbresim barazimin e dytë

$$x^2 - y^2 = 9x - 9y \Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 9(x-y) \Leftrightarrow (x-y)(x+y-9) = 0 .$$

Kështu merret sistemi

$$\begin{cases} (x-y)(x+y-9) = 0 \\ y^2 = 4x + 13 \end{cases}$$

i cili është ekuivalent me sistemet

I. $\begin{cases} x-y=0 \\ y^2=4x+13 \end{cases}$ II. $\begin{cases} x+y-9=0 \\ y^2=4x+13 \end{cases}$

Pas zgjidhjes së sistemeve I, II përfundojmë se bashkësia e zgjidhjeve të sistemit është $Z=\{(0,0), (17,17), (-3,12), (12,-3)\}$.

Detyra 4. Të zgjidhet sistemi i barazimeve

$$\begin{cases} x^3=2ax+ay \\ y^3=ax+2ay \end{cases}.$$

Zgjidhja.

Duke mbledhur anë për anë barazimet e sistemit merret

$$x^3-y^3=3a(x+y). \tag{1}$$

Duke zbritur anë për anë barazimet e sistemit merret

$$x^3-y^3=a(x-y). \tag{2}$$

Transformojmë relacionet (1) dhe (2) dhe marrim

$$\left.\begin{aligned} (x+y)(x^2-xy+y^2-3a)=0 \\ (x-y)(x^2+xy+y^2-a)=0 \end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

Sistemi (3) është ekuivalent me sistemet vijuese:

I) $\begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \end{cases}$ II) $\begin{cases} x+y=0 \\ x^2+xy+y^2-a=0 \end{cases}$

III) $\begin{cases} x-y=0 \\ x^2-xy+y^2-3a=0 \end{cases}$ IV) $\begin{cases} x^2-xy+y^2-3a=0 \\ x^2+xy+y^2-a=0 \end{cases}$.

Nga sistemi I) merret $x_1=0,\ y_1=0$ dhe kjo paraqet zgjidhje të sistemit të dhënë për çdo numër real *a*.

Nga sistemi II) merret $y=-x$ dhe $x^2=a$.

Qartë se për $a<0$ sistemi nuk ka zgjidhje reale, kurse për $a\ge 0$ merren zgjidhjet: $\begin{cases} x_2=\sqrt{a} \\ y_2=-\sqrt{a} \end{cases}$ dhe $\begin{matrix} x_3=-\sqrt{a} \\ y_3=\sqrt{a} \end{matrix}$.

Nga sistemi III) merret $y=x$ dhe $x^2=3a$.

Sikur tek sistemi II) për $a<0$ sistemi nuk ka zgjidhje reale, kurse për $a\geq 0$ merren zgjidhjet: $\begin{cases} x_4=\sqrt{3a} \\ y_4=\sqrt{3a} \end{cases}$ dhe $\begin{matrix} x_5=-\sqrt{3a} \\ y_5=-\sqrt{3a} \end{matrix}$.

Le të zgjidhim sistemin IV (i cili është simetrik).

Zëvendësojmë $x+y=u$ dhe $xy=v$ dhe marrim sistemin

$$\begin{cases} u^2-3v=3a \\ u^2-v=a \end{cases} \text{ prej nga marrim } \begin{cases} u=0 \\ v=-a \end{cases}$$

pra kemi sistemin

$$\begin{cases} x+y=0 \\ xy=-a \end{cases} \text{ ose } \begin{cases} y=-x \\ x^2=a \end{cases}$$

që është ekuivalent me sistemin II.

Përfundojmë se bashkësitë e zgjidhjeve të sistemit janë:

$$Z_1=\{(0,0),\ (\sqrt{a},-\sqrt{a}),\ (\sqrt{3a},\ \sqrt{3a}),\ (-\sqrt{3a},\ -\sqrt{3a}) \text{ nëse } a>0\ \}$$

$$Z_2=\{(0,0) \text{ nëse } a\leq 0\}\ .$$

Detyra 5. Të caktohen të gjitha zgjidhjet e plota të sistemit

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x^3+y^3+z^3=3 \end{cases}.$$

Zgjidhja.

Barazimi e pare të sistemit e ngrisim në fuqinë e tretë dhe pastaj prej tij zbresim barazimin e dytë. Merret:

$$(x+y+z)^3-x^3-y^3-z^3=3^3-3=24$$

$$(x+y+z-x)((x+y+z)^2+x(x+y+z)+x^2)-(y+z)(y^2-yz+z^2)=24$$

$$(y+z)((x+y+z)^2+x(x+y+z)+x^2)-(y+z)(y^2-yz+z^2)=24$$

$$(y+z)((x+y+z)^2+x(x+y+z)+x^2-(y^2-yz+z^2))=24\ .$$

Pas transformimeve të mëtejme merret

$$(y+z)(x+y)(x+z)=8\,.$$

Meqë x,y,z janë numra të plotë atëherë edhe numrat $y+z,\ x+y,\ x+z$ janë të plotë dhe si të tillë duhet të jenë faktor të numrit 8.

Prandaj, $x+y=3-z$ është njëri nga numrat $\pm 1,\ \pm 2,\ \pm 4,\ \pm 8$.

Pasi të analizohen të gjitha rastet arrijmë në përfundim se zgjidhje e sistemit janë treshet: $(1,1,1),\ (-5,4,4),\ (4,-5,4),\ (4,4,-5)$.

Detyra 6. Të zgjidhet sistemi i barazimeve

$$\begin{cases} x^y = y^x \\ x^p = y^q \ \ (x,y>0),\ p,q\in R,\ p\neq q \end{cases}.$$

Zgjidhja.

Është e qartë se $x=1,\ y=1$ është një zgjidhje e sistemit. Le të caktojmë zgjidhjet tjera.

Nga barazimi i dytë i sistemit kemi

$$x^p = y^q \Rightarrow x = y^{\frac{q}{p}} \tag{1}$$

Relacionin (1) e zëvendësojmë në barazimin e parë të sistemit dhe marrim

$$\left(y^{\frac{q}{p}}\right)^y = y^{y^{\frac{q}{p}}}$$

që është ekuivalente me barazimin

$$\frac{qy}{p} = y^{\frac{q}{p}} \tag{2}$$

Me zgjidhjen e (2) merret $y=\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{p}{q-p}}$ (3)

Kur (3) zëvendësohet në (1) merret $x=\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{q}{q-p}}$.

Përfundojmë se $(1,1),\ \left(\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{q}{q-p}},\left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{p}{q-p}}\right)$ janë zgjidhjet e sistemit të barazimeve.

Detyra 7. Të zgjidhet sistemi i barazimeve

$$\begin{cases} |x+2|+|y-2|=4 \\ |x+2|-3y=3 \end{cases}.$$

Zgjidhja.

Nga barazimi i dytë i sistemit të dhënë merret

$$|x+2|=3y+3 \qquad (1)$$

Relacionin (1) e zëvendësojmë në barazimin e parë të sistemit dhe marrim

$$3y+3+|y-2|=4 \Rightarrow 3y+|y-2|=1 \qquad (2)$$

Duke zgjidhur barazimin (2) merret $y=-\frac{1}{2}$.

Tani nga (1) kemi $|x+2|=3\left(-\frac{1}{2}\right)+3 \Rightarrow |x+2|=\frac{3}{2}$ (3)

Me zgjidhjen e (3) marrim $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{7}{2}$.

Pra $\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $\left(-\frac{7}{2},-\frac{1}{2}\right)$ janë zgjidhjet e sistemit.

Detyra 8. Të caktohen dyshet e numrave të plotë x dhe y që plotësojnë sistemin e mosbarazimeve

$$\begin{cases} y-|x^2-2x|+\frac{1}{2}>0 \\ y+|x-1|<2 \end{cases}.$$

Zgjidhja.

Sistemin e dhënë e shkruajmë në trajtën

$$\begin{cases} y+\frac{1}{2}>|x^2-2x| \\ 2-y>|x-1| \end{cases}. \qquad (1)$$

Meqë $|x^2-2x|$ dhe $|x-1|$ janë numra jonegativ nga (1) merret:

$$y+\frac{1}{2}>0 \wedge 2-y>0$$

prej nga merret $y>-\frac{1}{2}$ dhe $y<2$. (2)

Numrat e plotë që plotësojnë (2) janë $y=0$ dhe $y=1$.

Shqyrtojmë veçmas rastet: 1) $y=0$, 2) $y=1$.

1) Për $y=0$ kemi sistemin

$$\begin{cases} |x^2-2x|<\frac{1}{2}. \\ |x-1|<2 \end{cases} \qquad (3)$$

Pas zgjidhjes së mosbarazimit të parë të (3) merret

$$x=0,\ x=2\,. \qquad (4)$$

Pas zgjidhjes së mosbarazimit të dytë të (3) merret

$$x=0,\ x=1,\ x=2\,. \qquad (5)$$

Nga (4) (5) merret që $x=0,\ x=2$.

Pra, kemi dyshet e numrave të plotë $x_1=0,\ y_1=0;\ x_2=2,\ y_2=0$.

2) Për $y=1$ kemi sistemin

$$\begin{cases} |x^2-2x|<\frac{3}{2}.. \\ |x-1|<1 \end{cases} \qquad (6)$$

Pas zgjidhjes merret $x_3=1,\ y_3=1$.

Përfundimisht bashkësia e zgjidhjeve të plota të sistemit të mosbarazimeve është $Z=\{(0,0),\ (2,0),\ (1,1)\}$.

Detyrë plotësuese

2. Sistemi i mësipërm të zgjidhet në bashkësinë e numrave realë.

Detyra 9. Të zgjidhet sistemi i mosbarazimeve $1<4^{|x^2-x|}<16$

Zgjidhja.

Zgjidhim së pari mosbarazimin

$$4^{|x^2-x|}>1$$

që është ekuivalent me mosbarazimin

$$|x^2-x|>0$$

me zgjidhjen e të cilit kemi $x\in R\setminus\{0,1\}$. (1)

Tani zgjidhim pjesën tjetër të mosbarazimit

$$4^{|x^2-x|}<16$$

që është ekuivalent me mosbarazimin

$$|x^2-x|<2$$

me zgjidhjen e të cilit kemi $x \in (-1,0) \cup (0,1) \cup (1,2)$ (2)

Nga (1) dhe (2) përfundojmë se zgjidhja e sistemit të mosbarazimeve është $x \in (-1,0) \cup (0,1) \cup (1,2)$.

Detyrë plotësuese

3. Vërtetoni ose mohoni: zgjidhja e sistemit $1 < n^{|x^2-x|} < n^2,\ \forall n \in N$ është $x \in (-1,0) \cup (0,1) \cup (1,2)$.

Detyra 10. Të zgjidhet sistemi i barazimeve

$$\begin{cases} |\log_a x| < 1 \\ \dfrac{n}{1-\log_a x} > \dfrac{1}{\log_a x}, a > 1,\ n \in N \end{cases}.$$

Zgjidhja.

Së pari mosbarazimin e dytë e transformojmë si vijon

$$\frac{n}{1-\log_a x} - \frac{1}{\log_a x} > 0 \Leftrightarrow \frac{n\log_a x - 1 + \log_a x}{\log_a x(1-\log_a x)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+1)\log_a x - 1}{\log_a x(1-\log_a x)} > 0. \qquad (1)$$

Shqyrtojmë tani mosbarazimin e parë të sistemit.

1) Për $x < 1,\ \log_a x < 0 \Rightarrow |\log_a x| = -\log_a x$. Pra, kemi

$$-\log_a x < 1 \Rightarrow \log_a x > -1 \Rightarrow x > a^{-1} \Rightarrow x > \frac{1}{a}.$$

D.m.th. $x \in \left(\frac{1}{a}, 1\right)$.

Kthehemi tek relacioni (1)

$$\frac{(n+1)\log_a x - 1}{\log_a x(1-\log_a x)} > 0.$$

Meqë për $x < 1,\ (n+1)\log_a x - 1 < 0$, (pse?) mbetet që

$$\log_a x(1-\log_a x) < 0 \qquad (2)$$

Meqë $\log_a x < 0$ për t'u plotësuar (2) duhet që $1-\log_a x > 0$ prej nga marrim që $x < a$.

Nga $x \in \left(\frac{1}{a},1\right)$ dhe $x < a,\ a > 1$ përfundojmë se $x \in \left(\frac{1}{a},1\right)$. (*)

2) Për $x > 1,\ \log_a x > 0 \Rightarrow |\log_a x| = \log_a x$. Kemi $\log_a x < 1 \Rightarrow x < a$.

Në anën tjetër relacioni (1) është ekuivalent me sistemet e mosbarazimeve

I) $\begin{cases}(n+1)\log_a x - 1 < 0\\ \log_a x(1-\log_a x) < 0\end{cases}$ II) $\begin{cases}(n+1)\log_a x - 1 > 0\\ \log_a x(1-\log_a x) > 0\end{cases}$. Pse?

Tregohet se sistemi (I) nuk ka zgjidhje (tregoni).

Tek sistemi (II) kemi $\log_a x > \frac{1}{n+1} \Rightarrow x > \sqrt[n+1]{a}$.

Meqë $\log_a x > 0$ mbetet që të vlejë $1 - \log_a x > 0 \Rightarrow x < a$. Pra

$x \in (\sqrt[n+1]{a}, a)$ (**)

Nga (*) dhe (**) përfundojmë se çdo x nga intervalet $\left(\frac{1}{a},1\right)$, $(\sqrt[n+1]{a}, a)$ është zgjidhje e sistemit të mosbarazimeve.

11. Të zgjidhet sistemi i mosbarazimeve

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{x^2-36} > \dfrac{x}{x-6} - \dfrac{3}{x+6}\\ |x-2| \geq 3-4x\end{cases}$$

Zgjidhja.

Le të zgjidhim mosbarazimin e parë për të cilin vërejmë se $x \in R \setminus \{-6,6\}$.

$$\frac{x^2}{x^2-36} - \frac{x}{x-6} + \frac{3}{x+6} > 0$$

$$-3\frac{(x+6)}{(x-6)(x+6)} > 0 \Leftrightarrow \frac{3(x+6)}{(x-6)(x+6)} < 0.$$

Duke zgjidhur mosbarazimin e fundit kemi

$\frac{3}{x-6} < 0$ nën kushtin që $x + 6 \neq 0$. Pra $x < 6$.

D.m.th. $x \in (-\infty,-6) \cup (-6,6)$. (1)

Le të zgjidhim mosbarazimin e dytë të sistemit.

Dallojmë rastet: 1) $x \leq 2$, 2) $x > 2$.

1) Nëse $x \leq 2$ atëherë $x - 2 \leq 0 \Rightarrow |x-2| = 2 - x$. Pra kemi mosbarazimin

$$2-x\ge 3-4x \Leftrightarrow 3x\ge 1 \Rightarrow x\ge \frac{1}{3}.$$

Pra $x\in\left[\frac{1}{3},\, 2\right]$.

2) Nëse $x>2$ atëherë $x-2>0 \Rightarrow |x-2|=x-2$. Marrim

$x-2\ge 3-4x \Rightarrow 5x\ge 5 \Rightarrow x\ge 1$. D.m.th. $x>2$

Pra $x\in\left[\frac{1}{3},+\infty\right)$. (2)

Nga (1) (2) përfundojmë se $x\in\left[(-\infty,-6)\cup(-6,6)\right]\cap\left[-\frac{1}{3},\infty\right)=\left[\frac{1}{3},6\right)$.

Detyra 12. Të zgjidhet sistemi

$$\begin{cases} 2|2x-3|+|4|x|+1|=8x-5 \\ |2x^2-9x+15|>20 \end{cases}.$$

Zgjidhja.

Mosbarazimi i dytë është ekuivalent me sistemin e mosbarazimeve

$$\begin{cases} 2x^2-9x+15\ge 0 \\ 2x^2-9x+15>20 \end{cases} \quad \text{ose} \quad \begin{cases} 2x^2-9x+15<0 \\ -2x^2+9x-15>20 \end{cases}. \text{ Pse?}$$

Me zgjidhjen e sistemeve vijuese merret

$$x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)\cup(5,+\infty) \qquad (1)$$

Le të zgjidhim në vijim barazimin e sistemit.

Dallojmë rastet 1) $x\in(-\infty,0)$; 2) $x\in\left[0,\frac{3}{2}\right)$; 3) $x\in\left[\frac{3}{2},\infty\right)$.

Lehtë tregohet se në rastin e parë dhe të dytë detyra nuk ka zgjidhje. Tregoni.

3) Le të jetë $x\in\left[\frac{3}{2},\infty\right)$. Barazimi shndërrohet në trajtën

$$2|2x-3|+|4x+1|=8x-5$$

$$4x-6+4x+1=8x-5$$

$$0\cdot x=0$$

Pra, zgjidhje është çdo $x\in\left[\frac{3}{2},\infty\right)$. (2)

Nga (1) dhe (2) përfundojmë se $x \in (5,\infty)$ është zgjidhja e sistemit.

Detyra 13. Të zgjidhet sistemi i barazimeve

$$\begin{cases} (y + y\sqrt{x} + y^2)\sqrt{x + y^2} = 65 \\ (x - y\sqrt{x} + y^2)\sqrt{x^2 + y^2} = 185 \end{cases}.$$

Zgjidhja.

Zëvendësojmë $\sqrt{x + y^2} = t;\ y\sqrt{x} = v$. Sistemi kalon në trajtën:

$$\begin{matrix} (t^2 + v)\cdot t = 65 \\ (t^2 - v)\cdot t = 185 \end{matrix} \sim \left.\begin{matrix} t^3 + vt = 65 \\ t^3 - vt = 185 \end{matrix}\right\}. \qquad (1)$$

Pasi të mblidhen anë për anë barazimet në sistemin (1) dhe pas transformimeve merret $t = 5,\ v = -12$.

Pra, sistemi i dhënë është ekuivalent me sistemin $\sqrt{x + y^2} = 5 \wedge y\sqrt{x} = -12$, me zgjidhjen e të cilit merret $x_1 = 9,\ y_1 = -4,\ x_2 = 16,\ y_2 = -3$.

Detyra 14. Të zgjidhet sistemi i barazimeve

$$\begin{cases} 2^{x^2+y} + 2^{x+y^2} = 8 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \end{cases}.$$

Zgjidhja.

Metoda 1. Nga barazimi $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2$ shohim se $x \geq 0,\ y \geq 0$ (por jo njëkohësisht $x = 0,\ y = 0$). Në anën e djathtë kemi numrin natyror 2, pra mbetet që x, y të jenë katror të numrave të plotë. Pra rastet e mundshme janë:

1) $x = 1,\ y = 1$; 2) $x = 4,\ y = 0$; 3) $x = 0,\ y = 4$.

Pas zëvendësimit në barazimin e parë vërejmë se zgjidhja e vetme është $x = 1$, $y = 1$.

*Shënim***.** Sikur *x* (apo *y*) të mos ishte katror i një numri të plotë, atëherë $\sqrt{x}$ ($\sqrt{y}$) do të ishte numër iracional, kështu që sido që të ishte $\sqrt{y}$ ($\sqrt{x}$) në anën e majtë do të merrnim numër iracional. I njëjti arsyetim jepet sikur asnjëri nga numrat x, y të mos ishte katror i plotë.

Metoda 2. Shfrytëzojmë mosbarazinë mes të mesmes aritmetike dhe gjeometrike dhe marrim

$$2^{x^2+y}+2^{x+y^2}\geq 2\cdot\sqrt{2^{x^2+x+y^2+y}}$$

kështu që nga barazimi i parë i sistemit kemi

$$8\geq 2\cdot\sqrt{2^{x^2+x+y^2+y}}$$

$$2^4\geq 2^{x^2+x+y^2+y}$$

Pra $x^2+x+y^2+y\leq 4$. (1)

Meqë $2(x+y)\geq(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2$ nga barazimi i dytë kemi

$$x+y\geq 2. \qquad (2)$$

Nga $2(x^2+y^2)\geq(x+y)^2$ dhe (2) rrjedh

$$x^2+y^2\geq 2. \qquad (3)$$

Nga (1) (2) dhe (3) merret që $x+y=2,\ x^2+y^2=2$ dhe përfundimisht $x=y=1$.

Detyrë plotësuese

4. Të zgjidhet sistemi

$$\begin{cases}2^{\frac{x}{2}}+2^{\frac{y}{2}}+2^{\frac{z}{4}}=6\\ 2^x+2^y+2^z=28\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=9\end{cases}.$$

Detyra 15. Të zgjidhet sistemi i barazimeve

$$\begin{cases}x\sqrt{x}-y\sqrt{y}=19(\sqrt{x}-\sqrt{y})\\ x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=7(\sqrt{x}+\sqrt{y})\end{cases}.$$

Zgjidhja.

Mbledhim barazimet e sistemit të dhënë dhe marrim

$$2x\sqrt{x}=26\sqrt{x}-12\sqrt{y}. \qquad (1)$$

Pas shumëzimit të barazimeve marrim

$$x^3-y^3=133(x-y). \qquad (2)$$

Transformojmë (2) si vijon

$$(x-y)(x^2+xy+y^2)-133(x-y)=0$$

$$(x-y)(x^2+xy+y^2-133)=0$$

$$x-y=0 \vee x^2+xy+y^2-133=0$$

Nëse $x=y=0$, pra nëse $x=y$ pasi të zëvendësojmë në (1) merret $x\sqrt{x}=7\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x}(7-x)=0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=7$.

Pra (0,0), (7,7) janë dy zgjidhje të sistemit të dhënë. Rasti $x^2+xy+y^2-133=0$ të shqyrtohet nga lexuesi. Tregoni se (4, 9) , (9, 4) janë zgjidhjet tjera të sistemit.

DETYRA PËR USHTRIME

1. Është dhënë sistemi i barazimeve lineare sipas x, y $(a,b -$ parametra real)

$$\frac{x+y}{a^2+b^2} = \frac{x-y}{2ab} \wedge \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = 2a \, .$$

Të vërtetohet se nëse $ab \neq 0;\ a \neq \pm b$ zgjidhjet e sistemit janë pozitive.

2. Të vërtetohet se zgjidhjet e sistemit sipas x, y $(n -$ parametër real)

$$\begin{cases} \dfrac{x}{1-2n} - \dfrac{y}{1+2n} = \dfrac{8n}{1-4n^2} \\ \dfrac{x}{1-2n} + \dfrac{y}{1+2n} = \dfrac{2+8n^2}{1-4n^2} \end{cases}$$

janë numra tek për çdo $n \in Z$.

3. Është dhënë sistemi sipas x, y $(k -$ parametër real)

$$\begin{cases} (k+2)x + (k-7)y = 7 \\ 4x - 5y = 8 + k \end{cases}$$

Të caktohet parametri k ashtu që sistemi të ketë zgjidhje të vetme.

4. Në sistemin e barazimeve

$$\begin{cases} (p-q)x + (3p-5)y = 2pq \\ (p+q)x + (q-7)y = 6pq \end{cases} \ (p, q - \text{parametra real})$$

Të caktohen parametrat p, q ashtu që sistemi të ketë pambarim shumë zgjidhje.

5. Të zgjidhet sistemi i barazimeve

$$\frac{xy}{ay+bx} = \frac{yz}{bz+cy} = \frac{zx}{cx+az} = \frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2},\ a,b,c \in R.,$$

6. Të caktohen kushtet që duhet të plotësojnë x, y ashtu që të vlejë sistemi i mosbarazimeve $\begin{cases} x > y \\ \dfrac{x}{x+1} > \dfrac{y}{y+1} \end{cases}$.

7. Të zgjidhet sistemi i barazimeve $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+ay+z=a \\ x+y+az=a^2 \end{cases}$.

8. Është dhënë sistemi i barazimeve

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=0 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=0 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=0 \end{cases}$$

Koeficientët $a_{ij}\,(i=1,2,3,\ j=1,2,3)$ plotësojnë kushtet vijuese:

i) $a_{11},\ a_{22},\ a_{33}$ janë numra pozitiv.

ii) Të gjithë koeficientët e tjerë janë numra negative.

iii) Në secilin barazim shuma e koeficientëve është pozitive.

Të vërtetohet se e vetmja zgjidhje e sistemit të dhënë është $x_1=x_2=x_3=0$.

Përgjithsoni për *n* barazime me *n* të panjohura.

9. Të zgjidhet sistemi i mosbarazimeve $\begin{cases} \dfrac{3x+5}{7}+\dfrac{10-3x}{5}>\dfrac{2x+7}{3}-7\dfrac{1}{21} \\ \dfrac{7x}{3}-\dfrac{11(x+1)}{6}>\dfrac{3x-1}{3}-\dfrac{13-x}{2} \end{cases}$.

10. Të caktohen zgjidhjet reale të sistemit

$$\begin{cases} 2x_2=x_1+\dfrac{2}{x_1} \\ 2x_3=x_2+\dfrac{2}{x_2} \\ \quad\dots \\ 2x_1=x_n+\dfrac{2}{x_n} \end{cases}.$$

11. Të caktohen $(x,y)\in R^2$ që plotësojnë sistemin e barazimeve

$$\begin{cases} x^2=(x-a)y \\ y^2-xy=9ax,\ a\in R \end{cases}.$$

12. Të zgjidhet sistemi i barazimeve në bashkësinë e numrave natyrorë

$$\begin{cases} x^2+5y^2+4z^2+4xy+4yz=125 \\ x^2+3y^2-4z^2+4xy-4yz=75 \end{cases}.$$

13. Të zgjidhet sistemi i barazimeve në bashkësinë e numrave realë pozitiv

$$\begin{cases} xy=c^2 \\ (\log_2 x)^2+(\log_2 y)^2=\dfrac{5}{2}(\log_2 c^2)^2 \end{cases}.$$

14. Të zgjidhet sistemi i barazimeve

$$\begin{cases} xy+z^2=2 \\ yz+x^2=2 \\ zx+y^2=2 \end{cases}$$

15. Të caktohen zgjidhjet reale të sistemit

$$\begin{cases} 3x^2+xy-2y^2=0 \\ 2x^2-3xy+y^2=-1 \end{cases}.$$

16. Të zgjidhet sistemi $\begin{cases} 3x^2-2xy=160 \\ x^2-3xy+2y^2=8 \end{cases}$.

17. Të caktohen zgjidhjet reale të sistemit $\begin{cases} x^3+y^3=1 \\ x^2y+2xy^2+y^3=2 \end{cases}$.

Të zgjidhen sistemet e mosbarazimeve

18. $\begin{cases} 2x^2+2<5x \\ x^2\ge x \end{cases}$.

19. $\begin{cases} \dfrac{(x+2)(x^2-3x+8)}{x^2-9}\le 0 \\ \dfrac{1-x^2}{x^2+2x-8}\ge 0 \end{cases}$.

20. $\begin{cases} x^2-5x+6>0 \\ \dfrac{3x-21}{x^2+x+4}<0 \end{cases}$.

21. Të zgjidhet sistemi i barazimeve $\begin{cases} x+y=a \\ x^4+y^4=a^4 \end{cases}$.

22. Për çfarë vlera të *a*-së sistemi $\begin{cases} x^2+(5a+2)x+4a^2+2a<0 \\ x^2+a^2=4 \end{cases}$

ka të paktën një zgjidhje?

23. Për çfarë vlera të *a*-së sistemi

$$\begin{cases} x^2-(3a+1)x+2a^2+2a<0 \\ x+a^2=0 \end{cases}$$

nuk ka zgjidhje?

24. Të caktohet funksioni $f(x)=ax^2+bx+c$ ashtu që të plotësohen kushtet vijuese:

$$\begin{cases} (x-1)^2 \le f(x) \le x^2-x, \ (x\ge 1) \\ \min|f(x)|=4, \ (-2\le x\le -1) \end{cases}.$$

25. Numrat realë x, y, a plotësojnë sistemin

$$\begin{cases} x+y=2a-1 \\ x^2+y^2=a^2+2a-3 \end{cases}.$$

Për çfarë vlera të prametrit *a* prodhimi xy do të merrë vlerën minimale?

26. Të zgjidhet sistemi i barazimeve

$$\begin{cases} \dfrac{x-\sqrt{x^2-y^2}}{x+\sqrt{x^2-y^2}}=x \\ \dfrac{x}{y}=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-y}} \end{cases}.$$

Të zgjidhen sistemet e barazimeve:

27. $\begin{cases} |x|+|y|=1 \\ x^2+y^2=a \end{cases}.$

28. $\begin{cases} x^3-y^3=19(x-y) \\ x^3+y^3=7(x+y) \end{cases}.$

29. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{3x-\pi y}{y+\pi}}+\sqrt{\dfrac{3x+9\pi}{y(9-\pi)}}=4 \\ \dfrac{x}{y}+9\dfrac{y}{x}=6 \end{cases}.$

30. $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3 \\ \sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}=3 \end{cases}.$

31. $\begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{y+1}{x}} - 2\sqrt[3]{\dfrac{x}{y+1}} = 1 \\ \sqrt{x+y+1} + \sqrt{x-y+10} = 5 \end{cases}.$

32. $\begin{cases} \sqrt{x-4} + \sqrt{y} + \sqrt{z+4} = 6 \\ 2\sqrt{x-4} - \sqrt{y} - 4\sqrt{z+4} = -12. \\ x+y+z = 14 \end{cases}$

33. $\begin{cases} \sqrt{x} - \sqrt{y} = 1 \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = a \end{cases}.$

34. $\begin{cases} |x+1| = 1 \\ |x| + |y| = 1 \end{cases}.$

35. $\begin{cases} |x-2| + y + 3 = 7 \\ x - 2 - |y+3| = -1 \end{cases}.$

36. $\begin{cases} |2x-1| - y = 2 \\ x - |4-y| = -1 \end{cases}.$

37. Sa zgjidhje reale i ka sistemi $\begin{cases} |x| + |y| = 1 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$?

38. Për çfarë vlera të a-së sistemi

$$\begin{cases} |x^2 - 7x + 6| + x^2 + 5x + 6 - 12|x| = 0 \\ x^2 - 2(a-2)x + a(a-4) = 0 \end{cases}.$$

ka dy zgjidhje?

39. Të zgjidhet sistemi i mosbarazimeve

$$\begin{cases} -\dfrac{x^2}{x^2-25} - \dfrac{x}{x+5} \geq \dfrac{4}{\mathrm{x}-5} \\ |2x+1| \leq 5 - 3x \end{cases}.$$

Të zgjidhen sistemet:

40. $\begin{cases} |2x| - |4|x+1| - 7| = 3x + 1 \\ |3x^3 - 15x + 18| \leq 23 \end{cases}.$

41. $\begin{cases} \sqrt{x^2 + 10x + 25} = \sqrt{9x^2 - 6|x| + 1} \\ |x-1| - 2|x+3| + 4\left|x - \dfrac{1}{3}\right| \geq 3x - 7 \end{cases}.$

42. $\begin{cases} a^{\frac{x}{y}} = b^{\frac{y}{x}} \\ x^a = y^b \end{cases}.$

43. $\begin{cases} x^{x^2} = y \\ x^{4x-1} = y^4 \end{cases}.$

44. $\begin{cases} (1+y)^2 = 100 \\ (y^4 - 2y^2 + 1)^{x-1} = \dfrac{(y-1)^{2x}}{(y+1)^2} \end{cases}.$

45. $\begin{cases} a^x = b^y = c^z \\ x^2 + y^2 + z^2 = d^2 \end{cases}.$

46. $\begin{cases} xy = c^2 \\ (\log_2 x)^2 + (\log_2 y)^2 = \dfrac{5}{2}(\log_2 c^2)^2 \end{cases}.$

47. $\begin{cases} x^m = y^n \\ \log_a \dfrac{x}{y} = \dfrac{\log_a x}{\log_a y} \end{cases}.$

48. $\begin{cases} 10^{3-\log(x-y)} = 250 \\ \sqrt{x-y} + \dfrac{1}{2}\sqrt{x+y} = \dfrac{26-y}{\sqrt{x-y}} \end{cases}.$

49. Le të jenë n,k numra pozitiv. Të caktohen x,y,z nëse $x,y>1$ dhe nëse vlejnë relacionet

$$\log_x x^n y^k + \log_y y^n x^k = 4\sqrt{nk}$$

$$x^{\log_{y^2} z} + y^{\log_{x^2} z} + (1-\sqrt{z})^2 = 1997.$$

Të zgjidhen sistemet e barazimeve:

50. $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{\log_7 y} = \sqrt{\log_x 7y^3} \\ xy + y^2 = 2x^2 \end{cases}.$

51. $\begin{cases} 3^{\log_{(x-2y)} 16} + 16^{\log_{(x-2y)} 3} = 18 \\ \sqrt{x^2 - 4y^2} = x - y \end{cases}.$

52. $\begin{cases} x^{\log_y x} \cdot y = x^{\frac{5}{2}} \\ \log_4 y \cdot \log_y (y-3x) = 1 \end{cases}.$

53. $\begin{cases} 20x^{\log_3 y} + 7y^{\log_3 x} = 81\sqrt[3]{3} \\ \log_9 x^2 + \log_{27} y^2 = \dfrac{8}{3} \end{cases}.$

54. $\begin{cases} \log_4 xy + 3\dfrac{\log_4 x}{\log_4 y} = 0 \\ \log_4 \dfrac{x}{y} - \log_4 x \cdot \log_4 y = 0 \end{cases}.$

55. $\begin{cases} a^{x^2} = b^{y^2} \\ x^a = y^b \end{cases}.$

TRANSFORMIMI I SHPREHJEVE ALGJEBRIKE

DETYRA PËR USHTRIME

1. $A=(a^2-b^2)(b^2-c^2)(a^2-c^2)$.

2. $(a+b)(b+c)(c-a)$.

3. $(x-y)(y-z)(x-z)(x^2+y^2+z^2)$.

4. $(3a^2+4a-1)(3a^2+2a+1)$.

5. $(a-b)(b-c)(a-c)(a+b+c)$.

8. 1) $-\dfrac{a^2}{4}$, 2) $-\dfrac{a^3}{4}$, 3) $\dfrac{9}{8}a^4$.

14. 1.

28. 1

29. $A=1$.

30. $A=4$.

43. Jo.

45. $l(x)=x-4$.

46. $x+4$.

47. $a=-6,\ b=8,\ c=-3$.

48. $m=-3,\ n=1,\ p=2$.

49. $a = b = c = d$.

50. $f(x, y) = \begin{cases} 2\sqrt{y}, \sqrt{x} \geq y \\ \dfrac{2\sqrt{xy}}{y}, \sqrt{x} < y \end{cases}$.

Rezultatet e detyrave plotësuese

3. $(x - y)(y - a)(x - a)(x + a + y)$.

11. 0.

12. $S = \dfrac{2n\sqrt{n} - \sqrt{2}\sqrt{n-1}}{n - 1 + \sqrt{2n} \cdot \sqrt{n-1}}$.

BARAZIMET

DETYRA PËR USHTRIME

1. $x = ab + ac + bc$. Nëse $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} = 0$ barazimi i dhënë shndërrohet në identitet dhe vlen për çdo x.

2. $x = a$ për $ab \neq 0$ dhe $a \neq \pm b$.

3. Për $m \neq 3$, $x = -\frac{1}{m-3}$. Për $m = 3$ barazimi është i pacaktuar ndërsa për $m = -3$ i pamundshëm.

4. $x = ab, a \neq \pm b$.

5. $x = [0,1]$.

12. $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{4a-3}}{2}$, $x_{3,4} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$.

14. $x_1 = 2 + \sqrt{5}, x_2 = -3 - \sqrt{10}$.

19. $1, \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

20. $-\frac{2}{3}$.

21. $x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{n}{n-2}}$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$.

22. $x_{1,2} = \pm 2,\ x_{3,4} = \pm\frac{1}{2}$.

23. $(3,9,9),\ (4,9,-14),\ (5,9,11)$.

24. $(-1,1)$.

25. Nuk ka zgjidhje.

26. $(4,2)$.

27. 2.

28. $\left(\frac{1}{2},-1\right)$.

29. 1, 2.

30. $2,-2$.

31. $x=\frac{-7\pm\sqrt{61}}{6}$.

32. Për $a>1, x=\frac{1+\sqrt{2a-1}}{2}$. Për $a<1$ nuk ka zgjidhje.

33. $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

34. $k=6^6$.

35. $x_{1,2}=\frac{2^n-(-1\pm\sqrt{5})^n}{2^n+(-1\pm\sqrt{5})^n}$.

36. (0, 0).

37. ± 3.

39. $x=\frac{4\sqrt{47}}{47}$.

43. $a=\pm 2$.

44. $\begin{cases} a\le 1, \text{ nuk ka zgjidhje} \\ a>1, \ x=\dfrac{a}{\sqrt[3]{a^2}-1} \end{cases}$.

45. $x_{1,2} = 17 \pm \sqrt{257}$.

46. 1024.

47. $10^{-2}, 10^{2}$.

48. 2.

49. Për $a > 1$ barazimi nuk ka zgjidhje. Për $a \leq 1, x = \pm \log_{12}(1 + \sqrt{1-a})$.

50. $\left\{ \frac{1}{\log 3}, \frac{\log \frac{37}{8}}{\log 3 \log 5} \right\}$.

51. Nuk ka zgjidhje.

52. $2^{-\frac{1}{9}}$.

53. $-1, 1, 2$.

54. 0.

55. $x_1 = 10^{-1}$, $x_2 = 10^{3}$.

56. $\frac{1}{3}$.

57. 32 **.**

58. $\frac{81}{32}, \frac{641}{256}$.

59. 10.

60. $x_{1,2}=\dfrac{k-2\pm\sqrt{(k-2)^2-4}}{2}$.

61. $\dfrac{1+\sqrt{4a+1}}{2},(a>0,x>0)$.

62. Jo.

63. Jo.

64. Jo.

65. Jo.

Rezultatet e detyrave plotësuese

1. $x=\dfrac{ab(a+b+2)}{a+b+2ab}$.

6. $x_{1,2}=\dfrac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

7. $(2,0),(-2,0),(3,5),(-1,-3)$.

8. Jo.

9. $x=\pm\sqrt{3}, y=\pm2\sqrt{2}$.

10. $(1,0),(0,1)$.

11. $(0,1),(\pm1,0),(0,-1),(\pm1,1),(\pm1,-1)$.

12. $(1,69),(2,55),(3,17)$.

15. $(3,3,3)$.

17. $(-1,2),(6,2)$.

18. $x=10, y=20$.

19. $(7,1),(6,2),(5,3)$.

IV. MOSBARAZIMET

DETYRA PËR USHTRIME

1. $-2 \le a < 1$.

2. 1) Nëse $a > \frac{1}{4}, x \in (-\infty, \infty)$

2) Nëse $0 < a \le \frac{1}{4}, x < \frac{1-\sqrt{1-4a}}{a}$, $x > \frac{1+\sqrt{1-4a}}{a}$

3) Nëse $a = 0$, $x < 2$

4) Nëse $a < 0$, $\frac{1+\sqrt{1-4a}}{a} < x < \frac{1-\sqrt{1-4a}}{a}$.

4. $-3 \le x < -2, -\frac{13}{11} \le x < -1, 1 < x \le 2, x > \frac{5}{2}$.

5. $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (0, -1+\sqrt{2})$.

6. $k \in (-5, 1)$.

7. $x \in (0, \infty)$.

8. $x \in \left(-\infty, \frac{7}{4}\right) \cup \left(\frac{5}{2}, \infty\right)$.

10. $\lambda \in (-3, -1)$.

11. $x \in \left[-2, -\frac{1}{2}\right) \cup [1, \infty)$.

12. $x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right)$.

13. $x \in [-2,0) \cup (0,2]$.

14. $x \in [5,\infty)$.

15. 1) Nëse $a \le 0 \wedge a \ge 4$ mosbarazimi nuk ka zgjidhje
2) Nëse $a = 2, x \in (-2,2)$
3) Nëse $0 < a < 2, x \in [-a,a]$
4) Nëse $2 < a < 4, x \in \left(-\frac{a}{2}\sqrt{4a-a^2}, \frac{a}{2}\sqrt{4a-a^2}\right)$.

17. $-\frac{1}{2} \le x < 3 - 2\sqrt{3}$.

18. $x \le 0$.

20. $x \in \left(\sqrt{\frac{7}{2}}, 2\right)$.

21. $x \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$.

22. $x \in (-2,2) \cup (3,\infty)$.

23. $x \in (1,2)$.

24. $x \in (-\infty,0) \cup \left(2, \frac{7}{2}\right) \cup (4,\infty)$.

26. $x \in (-1,2) \cup (-3,-2)$.

28. $x \in (-1,0) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right)$.

29. $x \in [4,8)$.

30. $x > 20$.

33. $x \in \left(-2, -\frac{37}{19}\right) \cup (2, \infty)$.

36. $x \in \left(-\frac{19}{4}, -3\right) \cup \left(4, \frac{23}{4}\right)$.

37. $y \in (0,1)$.

38. $x \in [\log_3 0.9, 2)$.

39. $x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

40. 1) Nëse $a < 0$, $x \in \left(1, \frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}\right)$

2) Nëse $0 < a \leq \frac{1}{4}$, $x \in \left(a, \frac{1-\sqrt{1-4a}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{1-4a}}{2}, 1\right)$

3) Nëse $a = 0$ dhe $a \geq 1$, mosbarazimi nuk ka zgjidhje

4) Nëse $\frac{1}{4} < a < 1$, $x \in (a, 1)$.

41. 1) Nëse $a \leq 1$, mosbarazimi nuk ka zgjidhje

2) Nëse $1 < a < 1000$, $x \in (2 - \sqrt{4 - \log a}, 1) \cup (2 + \sqrt{4 - \log a}, \infty)$

3) Nëse $a = 1000$, $x \in (3, \infty)$

4) Nëse $1000 < a < 10000$, $x \in (1, 2 - \sqrt{4 - \log a}) \cup (2 + \sqrt{4 - \log a}, \infty)$

5) Nëse $a = 10000$, $x \in (1, 2) \cup (2, \infty)$

6) Nëse $a > 10000$, $x \in (1, \infty)$.

42. $3 \leq x < 4, 4 < x < 5, x > 5$.

43. $x \in \left(0, \frac{1}{2}\right] \cup (1, 2)$.

44. $x \in (1, \infty)$.

45. $x \in [1, 2]$.

46. $x \in \left(-1, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (2, \infty)$.

47. $x \in (-4, -3) \cup (2, 5)$.

Rezultatet e detyrave plotësuese